

# SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES

Autor(en): **Lebesgue, Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28584>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES CERCLES FOCALUX DES CONIQUES

PAR

M. Henri LEBESGUE, Membre de l'Institut (Paris).

## 1. — INTRODUCTION.

Sur un pareil sujet on ne saurait prétendre dire quoi que ce soit de réellement nouveau, j'ai seulement voulu écrire un exposé élémentaire et complet des premiers faits de la théorie. C'est qu'en effet aucun exposé de ce genre n'existe à ma connaissance. La question ne faisant pas partie des programmes officiels et le point de départ de la théorie se présentant facilement, on se contente souvent d'indiquer ce point de départ, renvoyant les développements aux exercices. C'est ainsi que les exercices 840 et suivants de la Géométrie de M. J. HADAMARD (Paris, Arm. Colin) ou 345 et suivants de la Géométrie de MM. G. ILIOVICI et P. ROBERT (Paris, Léon Eyrolles) constitueraient d'excellents exposés. Mais il arrive que, n'ayant pas traité ces exercices, connaissant la théorie des cercles focaux comme question de géométrie analytique, certains s'imaginent que l'étude élémentaire serait longue, difficile, compliquée de discussions pénibles et ils hésitent à faire telle remarque, ils ne sont pas préparés à proposer tel exercice, qui feraient mieux comprendre une propriété en la généralisant, ou montreraient mieux la puissance d'un raisonnement.

Il ne s'agit pas du tout d'enfler des programmes déjà trop lourds; je voudrais, au contraire, aider les jeunes professeurs à soulager leurs élèves en devinant parfois le mot à dire, celui qui ferait mieux comprendre. A cet effet, rien ne vaut les généralisa-

tions et les rapprochements d'autant que, dans la question actuelle, le rôle mystérieux des foyers n'a été compris des mathématiciens eux-mêmes que lorsque le raisonnement de Dandelin, la définition de Plücker ont fait des foyers des cercles focaux particuliers.

Deux articles, l'un de M. Ch. BIOCHE, l'autre de M. H. MIRABEL, destinés à de jeunes élèves (*Les Sciences au Baccalauréat*, oct. 1937 — Paris, A. Hattier) montrent bien comment des maîtres avertis peuvent utiliser élémentairement la théorie des cercles focaux. Ces articles m'ont donné l'idée de présenter sous une forme moins concise et plus accessible une Note que j'avais publiée jadis (*Nouv. Ann. de Math.*; juin 1923); l'exposé qui en résulte est d'ailleurs en étroite parenté avec ceux constitués par les exercices cités ou avec la Note de M. Bioche.

## 2. — RAPPEL DE PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE CIRCONFÉRENCES.

L'étude de l'axe radical  $\Delta$  de deux circonférences  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  de centres  $\Omega$  et  $\Omega_1$  conduit à la relation

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_1) + 2\overline{\Omega\Omega_1} \cdot \overline{M\Delta} = 0, \quad (1)$$

dans laquelle le symbole  $\mathcal{P}(M, \Gamma)$ , par exemple, représente la puissance d'un point  $M$  par rapport à  $\Gamma$  et le symbole  $\overline{M\Delta}$  le vecteur perpendiculaire à  $\Delta$  dont l'origine est  $M$  et dont l'extrémité est sur  $\Delta$ .

Si  $\Gamma_2$  est une autre circonférence du faisceau  $\Gamma, \Gamma_1$ , et dont le centre est  $\Omega_2$ , on a :

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_2) + 2\overline{\Omega\Omega_2} \cdot \overline{M\Delta} = 0. \quad (2)$$

D'où, par l'élimination de  $\overline{M\Delta}$ ,

$$\overline{\Omega_1\Omega_2} \mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\Omega_2\Omega} \mathcal{P}(M, \Gamma_1) + \overline{\Omega\Omega_1} \mathcal{P}(M, \Gamma_2) = 0; \quad (3)$$

*relation qui lie les trois puissances d'un point quelconque  $M$  par rapport à trois cercles d'un faisceau.*

Si  $M$  est tel que la somme des deux premiers termes soit nulle,

il en est de même du troisième et inversement; donc le lieu des points M tels que,  $\lambda$ , étant une constante donnée,

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) = \lambda \mathcal{P}(M, \Gamma_1), \quad (4)$$

lequel est la droite  $\Delta$  pour  $\lambda = 1$ , est, pour  $\lambda \neq 1$ , la circonférence  $\Gamma_2$  du faisceau  $\Gamma, \Gamma_1$  dont le centre  $\Omega_2$  est tel que

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \lambda. \quad (5)$$

Ce lieu n'existe donc que si cette circonférence existe. Plaçons-nous dans le cas où,  $\Gamma$  ayant le rayon R,  $\Gamma_1$  est un cercle point.  $\Delta$  est alors la parallèle à la polaire de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Gamma$ , qui est équidistante de cette polaire et de  $\Omega_1$ , c'est-à-dire la médiatrice de  $\Omega_1 \Omega'_1$ ;  $\Omega'_1$  étant tel que

$$\overline{\Omega \Omega'_1} \cdot \overline{\Omega \Omega_1} = R^2;$$

$\Omega'_1$  est le second cercle point du faisceau. Le rayon  $R_2$  de  $\Gamma_2$  est donné de même par

$$\overline{\Omega_2 \Omega'_1} \cdot \overline{\Omega_2 \Omega_1} = R_2^2;$$

il n'est donc réel que pour  $\Omega_2$  en dehors de  $\Omega_1 \Omega'_1$ . Or, le rapport

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega} + \overline{\Omega \Omega_1}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1}}{\overline{\Omega \Omega_2}}},$$

varie de l'infini à

$$\frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1}}{\overline{\Omega \Omega'_1}}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1^2}}{R^2}} = \frac{R^2}{R^2 - \overline{\Omega \Omega_1^2}},$$

sans passer par la valeur zéro, quand  $\Omega_2$  se déplace de  $\Omega_1$  à  $\Omega'_1$ .

Donc le lieu existe, sauf si l'on a:

$$\lambda(R^2 - \overline{\Omega \Omega_1^2}) > R^2. \quad (6)$$

Si les deux membres étaient égaux, le lieu se réduirait au point  $\Omega'_1$ .



3. — ENONCÉ DU PROBLÈME; CONDITIONS D'EXISTENCE  
DU LIEU.

Etant données une circonférence  $\gamma$ , une droite  $d$ , une constante non nulle  $k$ , étudions le lieu  $\mathcal{C}$  des points  $M$  tels que l'on ait :

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k \overline{Md}^2 . \quad (7)$$

La famille des courbes  $\mathcal{C}$  contient les coniques.

Si ce lieu existe, il admettra pour axe de symétrie la perpendiculaire  $\omega x$  abaissée du centre  $\omega$  de  $\gamma$  sur  $d$ .

Soit  $\Lambda$  une droite faisant l'angle  $\varphi$  avec  $\omega x$  et rencontrant  $d$  au point  $K$ ; pour  $M$  sur  $\Lambda$ ,  $Md$ , c'est-à-dire la longueur de  $\overline{Md}$ , égale  $MK \cos \varphi$ , donc les points d'intersection de  $\Lambda$  et de  $\mathcal{C}$  sont ceux où  $\Lambda$  coupe la courbe définie par la relation

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k \cos^2 \varphi \overline{MK}^2 . \quad (8)$$

Cette courbe est un cercle  $Z$  du faisceau  $\gamma, K$ , ou exceptionnellement l'axe de ce faisceau.

Les points cherchés existeront si cette circonférence auxiliaire  $Z$  existe et coupe  $\Lambda$ . Pour le cas où  $\Lambda$  passe par  $\omega$  l'existence de  $Z$  est seule en question.

Or, d'après (6), elle existe sauf si l'on a :

$$k(r^2 \cos^2 \varphi - \overline{\omega d}^2) > r^2 ,$$

$r$  étant le rayon de  $\gamma$ .

Quant à  $\mathcal{C}$ , elle existera sauf si l'inégalité précédente était vérifiée quel que soit  $\varphi$ . Or, la parenthèse devenant négative pour  $\varphi$  assez voisin de  $\frac{\pi}{2}$  il faudrait  $k < 0$  et ceci exigerait alors que la parenthèse soit toujours négative, d'où

$$\overline{\omega d} = \text{longueur de } \overline{\omega d} > r .$$

Enfin, comme la plus petite valeur du premier membre est atteinte pour  $\varphi = 0$ , le lieu  $\mathcal{C}$  existe sauf si l'on a à la fois :

$$\overline{\omega d} > r \quad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0 . \quad (9)$$

Pour  $\omega d = r$  la seconde inégalité ne peut être vérifiée; pour  $\omega d > r$  et  $k(\overline{\omega d^2} - r^2) + r^2 = 0$ ,  $\mathcal{C}$  se réduirait à un point, au pôle H de  $d$  par rapport à  $\gamma$ . Il était donc légitime d'écartier comme nous l'avons fait le cas où les inégalités se transformeraient en égalités.

4. — CONSTRUCTION PAR POINTS ET PAR TANGENTES.

Pour construire  $\mathcal{C}$  on prendra une droite  $\Lambda$  que l'on fera varier continûment. Choisissons  $\varphi = 0$ , donc prenons une droite D parallèle à  $\omega x$  et dont nous ferons varier le pied H sur  $d$ . La relation (8) devient:

$$\mathcal{E}(M, \gamma) = k \overline{MH}^2 . \tag{10}$$

Pour  $k = 1$ , cette relation définit une droite  $\Gamma$ , d'où un point M sur D. Ainsi, pour  $k = 1$ ,  $\mathcal{C}$  admet un point et un seul sur toute droite D parallèle à  $\omega x$ ; nous dirons que  $\mathcal{C}$  est parabolique.

Pour  $k \neq 1$ , la relation (10) définit une circonférence  $\Gamma$  dont le centre est le point  $\Omega$  de  $H\omega$  tel que

$$\frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{\Omega H}} = k . \tag{11}$$

Donc, quand H varie sur  $d$ ,  $\Omega$  décrit la perpendiculaire  $Oy$  à  $O\omega x$  qui est l'homothétique de  $d$  par rapport à  $\omega$  et dans le rapport

$$\frac{\overline{\omega\Omega}}{\overline{\omega H}} = \frac{-k}{1-k} . \tag{12}$$

Les deux points M et M' de  $\mathcal{C}$  situés sur D sont, quand ils existent, symétriques l'un de l'autre par rapport à  $Oy$ ; ainsi, pour  $k \neq 1$ , la courbe  $\mathcal{C}$  a un centre O et deux axes de symétrie rectangulaires  $O\omega x, Oy$ .

Reprenons une droite  $\Lambda$  quelconque; ses points de rencontre avec  $\mathcal{C}$  sont sur la circonférence Z définie par (8). Mais tous les points communs à  $\mathcal{C}$  et à Z, vérifiant (7) et (8), sont tels que

$Md = MK \cos \varphi$ ; donc ce sont les points communs à  $Z$  et à  $\Lambda$  ou à la droite  $\Lambda'$  symétrique de  $\Lambda$  par rapport à  $d$ .

Faisons tendre  $\Lambda$  vers  $D$ , donc  $K$  vers  $H$  et  $\varphi$  vers zéro;  $Z$  tend vers  $\Gamma$ . Les deux sécantes communes à  $Z$  et  $\mathcal{C}$  tendent vers  $D$ , les quatre points communs à ces deux courbes tendent deux à deux vers les points  $M$  et  $M'$  de rencontre de  $\Gamma$  et de  $\mathcal{C}$ .

On devine ainsi que ces deux courbes sont tangentes en  $M$  et  $M'$ ; pour le démontrer, précisons. Soit  $M_0$  un point de  $\mathcal{C}$ , choisissons  $\Lambda$  passant par  $M$  et par le symétrique de  $M_0$  par rapport à  $d$ ,  $\Lambda'$  passe donc par  $M_0$ . Si l'on fait tendre  $M_0$  vers  $M$ ,  $\Lambda$  tend vers  $D$ ,  $Z$  vers  $\Gamma$ ; les deux rayons de  $Z$  aboutissant en  $M$  et  $M_0$ , tendent tous deux vers  $\Omega M$  ainsi que la bissectrice intérieure de leur angle. Donc  $MM_0$ , qui est perpendiculaire à cette bissectrice, a une position limite, c'est-à-dire que  $\mathcal{C}$  a une tangente, et cette tangente est la perpendiculaire à  $\Omega M$ .

Donc, *en chaque point  $M$  de  $\mathcal{C}$ , il existe une tangente qui est la droite  $\Gamma$  ayant fourni  $M$ , si  $\Gamma$  est une droite, et qui est, dans le cas général, la tangente en  $M$  au cercle  $\Gamma$  ayant fourni ce point.*

Soit  $MT$  cette tangente,  $T$  étant sur  $d$ . La circonférence de diamètre  $MT$  étant orthogonale en  $M$  à  $\Gamma$  et passant par  $H$  est orthogonale à toutes les circonférences du faisceau  $H, \Gamma$ , donc à  $\gamma$ . Ainsi: *la portion de tangente  $MT$  comprise entre un point  $M$  de  $\mathcal{C}$  et la droite  $d$  est le diamètre d'une circonférence orthogonale à  $\Gamma$ . Cette propriété, quand  $\Gamma$  est un cercle point, est bien connue: la portion de tangente à une conique comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit; nous la retrouverons.*

Les constructions diverses de la tangente se déduisent facilement de cette propriété qu'on pourra démontrer aussi en recherchant une droite  $\Lambda$  tangente à la circonférence  $Z$  qui lui est associée.

La construction des tangentes peut aussi se déduire de celle des normales. Pour  $k = 1$ ,  $\Gamma$  est l'axe radical de  $\gamma$  et de  $H$ , donc est perpendiculaire à  $\omega H$ , la normale en  $M$  est parallèle à  $\omega H$  et, si  $n$  est le point de rencontre de cette normale et de  $\omega x$ ,  $nM$  et  $\omega H$  sont équipollents. Donc, *dans une courbe  $\mathcal{C}$  parabolique, la sous-normale (projection de  $nM$  sur  $\omega x$ ) est constante et égale à  $\omega d$ .*

Pour  $k \neq 1$ , on a, d'après (11),

$$\frac{\overline{Mn}}{\overline{M\Omega}} = \frac{\overline{H\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 + \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 - k ;$$

donc, les deux axes  $Ox$ ,  $Oy$  d'une courbe  $\mathcal{C}$  à centre déterminent sur toute normale à cette courbe deux segments  $\overline{Mn}$ ,  $\overline{M\Omega}$  dont le rapport est constant et égal à  $1 - k$ .

5. — CERCLES BITANGENTS, CERCLES FOC AUX.

Soit  $k \neq 1$ ; à toute parallèle  $D$  à  $\omega x$ , coupant  $d$  en  $H$ , nous associons un cercle  $\Gamma$  grâce à la relation (10), toutes les fois du moins que cette relation donne un lieu ou un point. Ce cercle  $\Gamma$ , qui peut donc être un cercle point <sup>1</sup>, est appelé un *cercle focal*, dont  $D$  est dite la *droite directrice*. Dans les cas où  $D$  et  $\Gamma$  se coupent,  $\Gamma$  est un cercle *bitangent* à  $\mathcal{C}$ .

Soit  $M_1$  un point quelconque, comme (11) et (12) donnent:

$$\frac{\overline{\Omega H}}{1} = \frac{\overline{H\omega}}{k-1} = \frac{\overline{\omega\Omega}}{-k} ,$$

la relation (3) appliquée aux trois cercles  $\gamma$ ,  $\Gamma$ ,  $H$  d'un même faisceau s'écrit:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) + (k-1) \cdot \mathcal{P}(M_1, \Gamma) - k\mathcal{P}(M_1, H) = 0 ,$$

ou, exprimant  $\mathcal{P}(M_1, H)$  à l'aide de  $M_1 d$  et  $M_1 D$ ,

$$\left[ \mathcal{P}(M_1, \gamma) - k\overline{M_1 d^2} \right] + (k-1) \left[ \mathcal{P}(M_1, \Gamma) - \frac{k}{k-1} \overline{M_1 D^2} \right] = 0 .$$

Donc, la courbe  $\mathcal{C}$  est susceptible d'être définie à partir de chaque couple  $\Gamma$ ,  $D$  par la relation:

$$\mathcal{P}(M_1, \Gamma) = K \overline{M_1 D^2} ,$$

dans laquelle on a posé:

$$K = \frac{k}{k-1} , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K} + \frac{1}{k} = 1 .$$

<sup>1</sup> On pourrait même sans grande difficulté parler ici de cercles imaginaires à centres réels.

Le passage d'un cercle  $\Gamma$  de centre  $\Omega$  et d'une droite  $D$  de pied  $H$  à un cercle  $\Gamma_1$  de centre  $\Omega_1$  et à une droite  $D_1$  de pied  $H_1$  est immédiat, que ce soit  $\Omega_1$  ou  $H_1$  qui soit donné. En effet,  $\Omega H$  et  $\Omega_1 H_1$  passant par  $\omega$ , on a :

$$\frac{\overline{\Omega\Omega_1}}{\overline{HH_1}} = \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\omega}} = \frac{k}{k-1} = K ;$$

d'autre part, l'axe radical  $\Delta$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  est parallèle à  $\omega x$  et passe par le point de rencontre des axes radicaux de  $\Gamma$  avec  $\gamma$  et de  $\Gamma_1$  avec  $\gamma$ . Mais ceux-ci sont aussi les axes radicaux de  $\gamma$  avec  $H$  et de  $\gamma$  avec  $H_1$ , donc  $\Delta$  est l'axe radical de  $H$  avec  $H_1$ , c'est-à-dire la médiatrice de  $HH_1$ .

Faisons jouer maintenant à  $\Gamma$ ,  $D$ ,  $K$  les rôles que jouaient tout d'abord  $\gamma$ ,  $d$ ,  $k$  et cherchons l'intersection de  $\mathcal{C}$  et de  $d$ . Il nous faudra construire la circonférence définie par

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) = K \overline{MH}^2 . \quad (10')$$

Or, comme l'on a, d'après (3),

$$\overline{\Omega H} \mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega} \mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\omega\Omega} \overline{MH}^2 = 0 ,$$

ou

$$\overline{\Omega H} \mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega} [\mathcal{P}(M, \Gamma) - K \overline{MH}^2] = 0 ,$$

la circonférence à construire est donc  $\gamma$ .

Ainsi le procédé qui, de  $d$ ,  $\gamma$ ,  $k$ , nous a permis de passer à  $D$ ,  $\Gamma$ ,  $K$ , permet aussi de revenir des circonférences  $\Gamma$  à une famille de circonférences centrées sur  $Ox$  et dont  $\gamma$  fait partie.

En résumé: toute courbe  $\mathcal{C}$  à centre est susceptible d'une double infinité de définitions comme lieu des points dont le quotient de la puissance par rapport à un cercle focal par le carré de la distance à une droite directrice est constant. Les centres des cercles focaux sont sur les deux axes de  $\mathcal{C}$  auxquels les droites directrices sont respectivement perpendiculaires. A tous les cercles ayant leurs centres sur  $Ox$  correspond la même constante  $k$ , à tous ceux ayant leurs centres sur  $Oy$  correspond la même constante  $K$ ; on a

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{K} = 1 . \quad (13)$$

On passe d'un cercle focal, soit  $\gamma$  de centre  $\omega$  sur  $Ox$ , à un cercle  $\gamma_1$  de la même série en remarquant qu'au déplacement  $\overline{\omega\omega_1}$  du centre correspond le déplacement  $\overline{dd_1}$  de la droite directrice, tel que

$$k \overline{dd_1} = \overline{\omega\omega_1} \quad (14)$$

et que l'axe radical de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  est la droite équidistante de  $d$  et de  $d_1$ .

On passe aux cercles focaux de l'autre série en considérant les cercles définis par

$$\mathcal{F}(M, \gamma) = k \overline{MH}^2 ; \quad (10)$$

$H$  étant un point quelconque de la droite directrice  $d$  du cercle  $\gamma$ .

#### 6. — NATURE DES COURBES $\mathcal{C}$ , LORSQUE $k$ EST DIFFÉRENT DE 1.

Il sera démontré que  $\mathcal{C}$  est une conique à centre si nous trouvons un cercle focal de rayon nul.

$\Gamma$  sera de rayon nul, si cette circonférence est réduite à son centre, c'est-à-dire est le second cercle point du faisceau  $\gamma, H$ ; donc si l'on a:

$$\overline{\omega\Omega} \cdot \overline{\omega H} = r^2 .$$

Ainsi,  $\Omega$  devra être à la rencontre de  $Oy$  et du cercle  $\delta$  inverse de  $d$ ,  $\gamma$  étant le cercle d'inversion. Si  $\delta$  coupe  $Oy$ , leurs points de rencontre sont des centres de cercles  $\Gamma$  de rayon nul;  $\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Oy$ .

Or  $\delta$  a pour diamètre

$$\frac{r^2}{\omega d} ,$$

et, d'après (12),

$$\overline{\omega O} = K \overline{\omega d} ,$$

donc  $\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Oy$  si l'on a:

$$K > 0 , \quad r^2 > K \overline{\omega d}^2 ; \quad (15)$$

$\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Ox$  si l'on a:

$$k > 0 , \quad R^2 > k \overline{\Omega D}^2 . \quad (16)$$

Si  $k$  est négatif,  $K$  est, d'après (13), compris entre 0 et 1; la première inégalité (15) est remplie, la seconde s'écrit encore,  $1 - k$  étant positif,

$$(1 - k)r^2 > -k\overline{\omega d}^2.$$

Si elle n'était pas vérifiée, on aurait

$$r^2 + k(\overline{\omega d}^2 - r^2) < 0;$$

ce qui exigerait, puisque  $k$  est négatif,

$$\omega d > r \quad \text{et} \quad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0,$$

c'est-à-dire les deux inégalités (9), lesquelles ne sauraient être vérifiées à la fois,  $\mathcal{C}$  étant réelle.

Donc, pour  $k < 0$ ,  $\mathcal{C}$  est une ellipse d'axe focal  $Oy$ , et l'on a une conclusion analogue pour  $K < 0$ .

Si  $k$  et  $K$  sont tous deux positifs, il n'y a plus lieu de tenir compte des conditions (9), qui ne peuvent être vérifiées simultanément que pour  $k < 0$ . D'après (13), on a alors  $k > 1$ ,  $K > 1$ .

Ecrivons la relation (3) pour les trois cercles  $\gamma$ ,  $\Gamma$  et  $H$ , et en prenant  $M$  au point  $H$ , il vient

$$\overline{H\Omega}(\overline{H\omega}^2 - r^2) + \overline{\omega H}(\overline{H\Omega}^2 - R^2) = 0,$$

où, d'après (11), (12), (13),

$$K(\overline{H\omega}^2 - r^2) + k(\overline{H\Omega}^2 - R^2) = 0.$$

Les relations entre longueurs

$$H\omega^2 = \omega d^2 + OD^2, \quad H\Omega^2 = \Omega D^2 + od^2,$$

$$\left| \frac{k}{K} \right| = \frac{H\omega}{H\Omega} = \frac{\omega d}{od} = \frac{OD}{\Omega D},$$

transforment l'égalité précédente en

$$K[K\omega d^2 - r^2] + k[k\Omega D^2 - R^2] = 0,$$

ce qui prouve que les deux quantités entre crochets sont de signes contraires. Donc l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités (15) ou (16) est vérifiée;  $\mathcal{C}$  est une hyperbole.

Un cas particulier vaut d'être signalé; c'est celui où les deux crochets seraient nuls. Alors le cercle  $\delta$  serait tangent à  $Oy$  en  $O$ ; pour  $D$  confondu avec  $Ox$ ,  $\Gamma$  se réduirait au point  $O$  et la relation  $\overline{MO}^2 = K \overline{MD}^2$  montre que  $\mathcal{C}$  est une hyperbole réduite à ses asymptotes. On laissera de côté ce cas limite dans la suite.

7. — NATURE DES COURBES  $\mathcal{C}$  LORSQUE  $k$  ÉGALE 1.

Pour éviter des complications de rédaction, on a supposé  $k \neq 1$  depuis le § 5; pourtant l'étude des courbes  $\mathcal{C}$  paraboliques peut être faite par les procédés des deux paragraphes précédents, seulement la lettre  $\Gamma$  désignera maintenant l'axe radical du faisceau  $H, \gamma$ . Il suffira donc de montrer que la marche de l'étude pour  $k = 1$  pourrait être parallèle à celle de l'étude déjà faite.

La relation (1) donne pour tout point  $M_1$  du plan

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \mathcal{P}(M_1, H) + 2 \overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 ,$$

ce qui s'écrit encore:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \overline{M_1 d}^2 = \overline{M_1 D}^2 - 2 \overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} .$$

Or  $\mathcal{C}$  est le lieu des points  $M_1$  pour lequel le premier membre est nul, donc  $\mathcal{C}$  est aussi le lieu des points  $M_1$  tels que l'on ait:

$$\overline{M_1 D}^2 - 2 \overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 ; \tag{17}$$

ou si l'on veut:

$$\sin \psi \cdot \overline{M_1 D}^2 - 2 \overline{\omega d} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 , \tag{17'}$$

$\psi$  étant l'angle de  $\Gamma$  et de  $\omega x$ .

Réciproquement, on déduira de l'équation (17) des cercles focaux ayant leurs centres sur  $\omega x$ ;  $\gamma$  est l'un d'eux. Les relations entre la série des droites  $\Gamma$  et celle des cercles focaux sont les mêmes que précédemment, seulement la relation (14) s'est simplifiée; devenue

$$\overline{\omega \omega_1} = \overline{d d_1} \tag{14'}$$

elle exprime la propriété déjà énoncée: la sous-normale est constante.



Quant au fait que deux droites  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  se coupent sur la médiatrice de  $HH_1$ , c'est une propriété bien connue des diamètres de la parabole.

Pour démontrer que nos courbes  $\mathcal{C}$  sont effectivement des paraboles, on pourrait procéder comme au paragraphe précédent, on ne rencontrerait que des simplifications; mais il suffira de noter qu'en prenant  $D$  confondue avec  $\omega x$ , auquel cas la tangente au point  $M$  de  $\mathcal{C}$  situé sur  $\omega x$  est perpendiculaire à  $\omega x$ , nous avons l'équation de  $\mathcal{C}$  en coordonnées rectangulaires par la formule (17');  $\omega d$  est le paramètre de notre parabole.

## 8. — LES DEUX FAMILLES DE CERCLES FOCaux DES CONIQUES A CENTRE.

J'ai maintenant achevé ce que je m'étais proposé de faire quant à la théorie générale. Sans doute cette étude pourrait être, comme toute étude, poussée plus loin, mais je me bornerai à donner encore quelques indications que les professeurs pourraient utiliser pour la construction d'exercices. A cet égard, la caractérisation des familles de cercles focaux est essentielle. Elle peut être faite de bien des manières; j'indique de nouvelles formes de cette caractérisation dans le cas des coniques à centre.

Reprenons la relation, qui nous a servi dans le § 5, entre les puissances d'un point  $M$  par rapport à  $\gamma$ ,  $\Gamma$  et  $H$ , et prenons pour  $M$  le point  $\omega$ ; nous avons:

$$-r^2 + (k-1)[\overline{\omega\Omega}^2 - R^2] - k\overline{\omega H}^2 = 0,$$

ou

$$-r^2 - (k-1)R^2 + \overline{\omega\Omega}^2 \left[ k-1 - \frac{k}{K^2} \right] = 0.$$

Simplifions en multipliant par  $\frac{-k}{k-1} = -K$ , on a:

$$Kr^2 + kR^2 - \overline{\omega\Omega}^2 = 0. \quad (18)$$

Cette relation, qui aurait permis une recherche facile des foyers, s'écrit, en supposant que  $\omega x$  soit l'axe focal, en conservant

aux lettres  $a, b, c$  leur sens ordinaire, et en posant  $B = + b^2$  pour l'ellipse,  $B = - b^2$  pour l'hyperbole, d'où  $k = \frac{c^2}{a^2}$ ,  
 $K = \frac{c^2}{-B}$ ,

$$B[c^2 R^2 - a^2 \overline{O\Omega^2}] = a^2 [c^2 r^2 + B \overline{O\omega^2}].$$

D'ailleurs, dans les cercles  $\Gamma$  il y a toujours celui pour lequel  $\Omega$  est en  $O$  et  $R = a$ , ceci donne la valeur constante du rapport du premier crochet à  $a^2$ , d'où, pour remplacer (18),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c^2}{a^2} R^2 - \overline{O\Omega^2} = c^2, \\ \frac{c^2}{B} r^2 + \overline{O\omega^2} = c^2. \end{array} \right. \quad (19)$$

Ces formules donnent les caractérisations suivantes: si l'on modifie dans le rapport  $\frac{c}{a}$  les rayons des cercles focaux ayant leurs centres sur l'axe non focal, on a le faisceau  $\Phi$  des cercles passant par les foyers;

si l'on modifie dans le rapport  $\frac{c}{\sqrt{-B}}$  les rayons des cercles focaux ayant leurs centres sur l'axe focal, on a le faisceau  $\Psi$  orthogonal au faisceau  $\Phi$ .

Le rapport  $\frac{c}{\sqrt{-B}}$  n'est réel que pour l'hyperbole, il égale alors  $\frac{c}{b}$ . Pour l'ellipse il faut dire: si l'on modifie dans le rapport  $\frac{c}{b}$  les rayons des cercles focaux ayant leurs centres sur l'axe focal, on a les circonférences qui sont coupées diamétralement par celles du faisceau  $\Phi$ .

Suivant la nature de la conique et la famille de cercles focaux envisagés, ces énoncés peuvent être mis sous diverses formes géométriques. Les plus élégantes ne sont d'ailleurs pas celles que suggèrent immédiatement les formules (19). Ainsi, considérons une hyperbole de cercle principal  $\Gamma_0$ , de foyer  $F$ , de directrice correspondante  $d$ , d'asymptote  $s'O_sT$ ;  $s'$  et  $s$  étant sur  $\Gamma_0$ ,  $s$  sur  $d$ ,  $T$  sur la droite directrice  $D$ , parallèle à  $Ox$ , d'un cercle focal  $\Gamma$  dont le centre  $\Omega$  est sur  $Oy$ ;  $D$  et  $d$  se coupent en  $H$ , le pied de  $d$  sur  $Ox$  est  $d_0$ .

Le cercle de diamètre MT considéré au § 4 se réduit pour le cas de l'asymptote, M étant à l'infini, à la perpendiculaire en T à OT. Comme ce cercle est orthogonal à  $\Gamma$ , cette perpendiculaire est  $\Omega T$ . (Si l'on remarque que les pieds des normales abaissées de  $\Omega$  sur l'hyperbole sont les points de rencontre de cette hyperbole et de D, on reconnaît là une propriété connue que nous démontrons incidemment.)

L'axe radical  $\Delta$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma_0$  étant équidistant des droites directrices D et Ox coupe l'asymptote au milieu  $\Delta_0$  de OT. Donc les symétriques S et S' de s et s' par rapport à  $\Delta_0$  sont sur  $\Gamma$  et nous avons cet énoncé, dû à M. H. Mirabel (*loc. cit.*) : *les cercles focaux d'une hyperbole ayant leurs centres sur l'axe non focal découpent sur les asymptotes des segments de longueur 2a.*

Le cercle  $\Gamma$  appartient au faisceau défini par H et par le cercle  $\gamma$  réduit au point F; H et F sont les deux cercles points de ce faisceau, donc sont deux points inverses par rapport à  $\Gamma$  et le rayon R de celui-ci est donné par :

$$R^2 = \overline{\Omega H} \cdot \overline{\Omega F} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{O d_0}{O F} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{\overline{O s}^2}{\overline{O F}^2} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \overline{\Omega F}^2 .$$

Ainsi, *les cercles focaux considérés sont vus du foyer sous un angle constant, égal au supplément de l'angle des asymptotes.* Cette seconde forme, qui découle tout de suite des formules (19), permettrait d'obtenir autrement l'énoncé de M. Mirabel.

## 9. — PROPRIÉTÉS DIVERSES.

Il est clair que des énoncés comme ceux du numéro précédent permettent de construire des problèmes intéressants; on a vu aussi qu'en étudiant les cercles focaux on rencontrait de nouvelles démonstrations des propriétés classiques. Il resterait à indiquer des généralisations des propriétés des foyers aux cercles focaux assez simples pour qu'elles puissent servir à mieux faire comprendre ces propriétés et leurs démonstrations; il me semble que, si l'on veut rester vraiment élémentaire, le choix est bien plus limité.

Naturellement, de la propriété exprimée par (7), résultent les généralisations de la formule  $\pm MF \pm MF' = 2a$ , à deux ou plus de deux cercles focaux de la même série; je n'insiste pas et je passe aux propriétés angulaires.

Soit une droite  $\Lambda$  coupant la conique  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $M'$  et en  $K$  la droite directrice  $d$  associée au cercle  $\gamma$  de centre  $\omega$ . Le cercle auxiliaire  $Z$  du § 3 qui passe par  $M$  et  $M'$ , appartenant au faisceau  $K, \gamma$ , admet pour polaire de  $K$  la polaire de  $K$  par rapport à  $\gamma$ , c'est-à-dire la perpendiculaire à  $\omega K$  au point  $k$  inverse de  $K$  par rapport à  $\gamma$ . Cette perpendiculaire  $kP$  coupant  $MM'$  au point conjugué harmonique de  $K$ , la droite  $\omega kK$  est l'une des bissectrices de l'angle des droites  $kM, kM'$  joignant aux points  $M$  et  $M'$  où la droite  $\Lambda$  coupe  $\mathcal{C}$ , l'inverse  $k$  par rapport à  $\gamma$  du point  $K$  où  $\Lambda$  coupe la droite directrice  $d$ .

Par  $K$ , faisons passer une autre sécante  $\lambda$  coupant  $\mathcal{C}$  en  $m$  et  $m'$ ,  $kP$  passera aussi par le conjugué harmonique de  $K$  par rapport à  $m$  et  $m'$ ; donc  $kP$  contient le point de rencontre de  $mm'$  et de  $MM'$ . Soit  $P$  ce point. Faisons tendre maintenant  $\lambda$  vers  $\Lambda$ :

*Si  $MM'$  coupe la droite directrice  $d$  de  $\gamma$  en  $K$ , et si  $k$  est l'inverse de  $K$  par rapport à  $\gamma$ , les deux bissectrices de l'angle  $MkM'$  sont la droite  $\omega kK$  et la droite  $kP$ ,  $P$  étant le point de rencontre des tangentes à  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $M'$ .*

C'est une généralisation du premier théorème de Poncelet. Si, au contraire, nous avons fait varier  $\Lambda$  de façon que  $M$  reste fixe et que  $M'$  tende vers  $M$ , nous aurions obtenu une nouvelle démonstration de l'existence de la tangente en  $M$  et prouvé que cette tangente  $MT$  est telle que, du point  $t$  inverse par rapport à  $\gamma$  du point  $T$  de cette tangente située sur  $d$ , on voie  $MT$  sous un angle droit.

En d'autres termes,  $T$  est le pôle par rapport à  $\gamma$  de la droite  $pM$  joignant  $M$  au pôle  $p$  de  $d$  par rapport à  $\gamma$ ; c'est une autre forme de la propriété déjà obtenue pour la tangente.

On construira donc  $MT$  en prenant le point  $T$  où la polaire de  $M$  par rapport à  $\gamma$  coupe  $d$ . Le pied  $m$  de cette polaire sur  $\omega M$  est tel que:

$$Mm \cdot M\omega = \mathcal{P}(M, \gamma) \quad \text{et} \quad Mm = MT \cos \widehat{TM\omega},$$

d'où, puisque

$$MT = \frac{Md}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}(M, \gamma)}{k}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$\frac{M\omega \cdot \cos \widehat{TM\omega}}{\sqrt{|\mathcal{P}(M, \gamma)|}} = \sqrt{|k|} \cos \varphi.$$

Si  $M$  est extérieur à  $\gamma$ ,  $k > 0$ ,  $\frac{\sqrt{\mathcal{P}(M, \gamma)}}{M\omega}$  est le cosinus du demi-angle sous lequel de  $M$  on voit  $\gamma$ ; soit  $\cos \alpha(M, \gamma)$ .

Si  $M$  est intérieur à  $\gamma$ ,  $k < 0$ ,  $\frac{\sqrt{-\mathcal{P}(M, \gamma)}}{M\omega}$  est la tangente du demi-angle sous lequel de  $\omega$  on voit la corde de  $\gamma$  dont  $M$  est le milieu; soit  $\text{tg } \beta(M, \gamma)$ . On a donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0, \quad \frac{\cos \widehat{TM\omega}}{\cos \alpha(M, \gamma)} = \sqrt{k} \cos \varphi, \\ k < 0, \quad \frac{\cos \widehat{TM\omega}}{\text{tg } \beta(M, \gamma)} = \sqrt{-k} \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (20)$$

*Le fait que le premier membre des formules (20) est, pour  $M$  fixe sur  $\mathcal{C}$ , le même pour tous les cercles focaux d'une même série est la généralisation à deux tels cercles de la propriété classique: la tangente bissecte les rayons vecteurs.*

#### 10. — AUTRES MÉTHODES.

##### CERCLES FOCaux DES OVALES DE DESCARTES.

Ces exemples suffiront à montrer les exercices de généralisation que l'on peut envisager; bien que nos énoncés ne constituent pas les seules généralisations possibles, les cas où l'on obtiendrait des résultats élégants et assez simples pour être utiles à de jeunes élèves paraissent peu nombreux. Il faut noter d'ailleurs que l'exposé actuel se prête mal à la généralisation des propriétés les plus élémentaires des coniques lesquelles résultent, non de la définition que nous avons généralisée par la formule (7), mais de celle-ci: une conique est le lieu du centre  $M$

d'un cercle  $\mathcal{M}$  qui passe par un point fixe et est tangent à un cercle fixe. Essayons de généraliser cette définition.

Nous attacherons tout naturellement à chaque point  $M$  un cercle  $\mathcal{M}$  de centre  $M$  et orthogonal à  $\gamma$ . Alors (7) montre que  $\mathcal{M}$  coupe la droite directrice  $d$  sous un angle constant, réel ou non, et (1) montre ensuite que  $\mathcal{M}$  coupe aussi sous un angle constant  $V$  chaque cercle du faisceau  $\gamma$ ,  $d$ . En recherchant les cercles du faisceau pour lesquels  $\cos V = \pm 1$ , on aura deux cercles, réels ou imaginaires, enveloppes des cercles  $M$  et dont les centres sont les foyers, réels ou imaginaires, de la même série de cercles focaux que  $\gamma$ .

On aperçoit dans ces considérations une méthode connue pour l'étude des cercles focaux, basée elle aussi sur les propriétés des systèmes de cercles, et qui généraliserait l'un des procédés classiques pour passer des définitions de de La Hire à la définition des coniques par foyer et directrice. Elle consiste essentiellement en ceci: ayant un premier cercle focal  $\gamma$  (par exemple un foyer ou le cercle principal), de chaque point  $M$  défini par (7) comme centre, on trace la circonférence  $\mathcal{M}_0$  obtenue en augmentant (ou diminuant) d'une quantité constante le rayon de la circonférence concentrique  $\mathcal{M}$  orthogonale à  $\gamma$ . Alors les  $\mathcal{M}_0$  coupent toutes les circonférences d'un faisceau sous des angles  $V_0$  constants; une d'entre elles donne  $V_0 = \frac{\pi}{2}$ , c'est un cercle focal, la droite directrice correspondante est l'axe radical du faisceau.

Il est clair que ce procédé, ou tout autre, présente autant d'intérêt que celui exposé. Je me contente de rappeler celui qui résulte du raisonnement de Dandelin pour les cercles ayant leurs centres sur l'axe focal et, pour l'autre série de cercles focaux d'une ellipse, celui qui consiste à regarder cette ellipse comme la projection d'une section plane d'une sphère.

Ce dernier procédé peut se généraliser à une conique quelconque et à n'importe laquelle des séries de cercles focaux; seulement, si l'on veut rester élémentaire, cela entraîne à des longueurs et à des artifices qui enlèvent tout intérêt à la méthode; mais son véritable avantage est qu'il s'applique aussi aux ovales de Descartes. C'est pour ce cas seulement que je vais l'indiquer et en faisant franchement appel à la théorie des quadriques.



Considérons deux quadriques de révolution  $Q_1, Q_2$  à axes parallèles, disons verticaux. Toute quadrique  $Q$  passant par leur intersection est une quadrique de révolution à axe vertical; tous les axes sont dans un même plan. Il faut noter pourtant que la quadrique  $Q_0$  dont l'axe est la droite de l'infini du plan des axes n'est pas vraiment de révolution:  $Q_0$  est le cylindre parabolique projetant l'intersection sur le plan des axes.

Dans les quadriques  $Q$  il y a, en général, quatre cônes dont l'un se réduit au cylindre  $Q_0$ . J'écarte le cas où  $Q_1, Q_2$  seraient homothétiques, cas qui conduirait à l'étude des coniques et non des ovales; il y a alors trois cônes en plus de  $Q_0$ . Soient  $S_1, S_2, S_3$  leurs sommets;  $F_1, F_2, F_3$  les projections de ces sommets sur le plan horizontal de projection;  $h_1, h_2, h_3$  les cotes de ces sommets au dessus du plan horizontal;  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  les demi-angles aux sommets des cônes.

Si  $M$  est un point du plan horizontal, les cotes des points des trois cônes qui se projettent en  $M$  sont :

$$h_1 \pm MF_1 \operatorname{tg} \theta_1, \quad h_2 \pm MF_2 \operatorname{tg} \theta_2, \quad h_3 \pm MF_3 \operatorname{tg} \theta_3.$$

D'où, pour définir la projection de l'intersection, l'une quelconque des trois relations:

$$h_1 \pm MF_1 \operatorname{tg} \theta_1 = h_2 \pm MF_2 \operatorname{tg} \theta_2 = h_3 \pm MF_3 \operatorname{tg} \theta_3. \quad (21)$$

Donc la projection envisagée est un ovale de Descartes de foyers, réels ou imaginaires,  $F_1, F_2, F_3$ . Bien entendu tout ovale peut inversement être considéré comme une telle projection, d'où l'existence du troisième foyer de l'ovale. Mais on peut aller plus loin: soient  $H_1$  et  $H_2$  les cotes des plans des centres de deux,  $Q_1$  et  $Q_2$ , de nos quadriques, soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  leurs contours apparents en projection horizontale.  $Q_1$ , par exemple, sera définie par une relation de la forme

$$(z - H_1)^2 = K_1 \mathcal{P}(M, \gamma_1),$$

où  $M$  est la projection d'un point et  $z$  sa cote. La projection de l'intersection de  $Q_1$  et  $Q_2$  est donc définie par la relation:

$$H_1 \pm \sqrt{K_1 \mathcal{P}(M, \gamma_1)} = H_2 \pm \sqrt{K_2 \mathcal{P}(M, \gamma_2)}; \quad (22)$$

généralisation exacte des relations (21).

Les cercles  $\gamma_1, \gamma_2$  jouent donc le rôle des foyers; ce sont les cercles focaux de l'ovale. Et, puisque la projection d'une courbe tracée sur une quadrique est tangente au contour apparent en projection aux points où elle le rencontre, ces cercles focaux sont ceux des cercles bitangents à l'ovale dont les centres sont sur l'axe de symétrie  $F_1F_2F_3$  de la courbe.

L'étude des ovales est donc à recommander aux aspirants professeurs; en particulier, les définitions des coniques, à l'aide de deux foyers ou d'un foyer et d'une directrice, leur apparaîtront alors comme deux cas particuliers de la définition d'un ovale par la relation (22).

---

## SUR LA THÉORIE DE L'ORDRE DES FIGURES RÉELLES ET LES TRAVAUX DE M. HAUPT

PAR

M. LINSMAN (Liège).

---

1. — Dans un très intéressant article « Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel » [51]<sup>1</sup>, M. MONTEL a donné un exposé d'ensemble des travaux de ce géomètre et des recherches qu'ils ont suscitées chez d'autres auteurs.

Sans vouloir fixer des limites bien nettes à la géométrie finie, nous pouvons dire qu'elle considère ordinairement ce que JUEL a appelé des figures élémentaires. Celles-ci sont toujours réelles, mais elles atteignent à un grand degré de généralité.

La notion capitale intervenant dans leur définition et dans leur étude est la notion d'ordre.

Considérons un ensemble ponctuel  $E$  plan (ou spatial), et supposons qu'il possède un nombre borné de points sur toute

---

<sup>1</sup> Les nombres en caractères gras renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.