

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CONTRIBUTION À LA CLASSIFICATION DES TRANSFORMATIONS  
CORRÉLATIVES RÉGULIÈRES DANS UN PLAN ET DANS UN  
ESPACE À TROIS DIMENSIONS

**Autor:** Vyichlo, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28594>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

CONTRIBUTION À LA CLASSIFICATION  
DES TRANSFORMATIONS CORRÉLATIVES  
RÉGULIÈRES DANS UN PLAN ET DANS UN ESPACE  
À TROIS DIMENSIONS

PAR

F. VYČICHLO (Praha).

La classification des corrélations régulières dans un espace à  $n$  dimensions a été faite et publiée par Siro MEDICI<sup>1</sup>. Celui-ci s'est servi des résultats des études de C. SEGRE<sup>2</sup>, BERTINI<sup>3</sup>, PREDELLO<sup>4</sup> et DEL PRETE<sup>5</sup> et, pour faire la classification des corrélations A, il s'est servi de la classification des homographies  $\Omega$ , pour lesquelles:

$$A \cdot \Omega = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = \Omega \cdot A .$$

M. K. KOMMERELL<sup>6</sup> s'est occupé de la classification des transformations corrélatives données par la relation

$$\sum a_{ik} x_i' x_k = 0 , \quad (i, k = 1, \dots, 4) .$$

<sup>1</sup> Siro MEDICI, Sulle omografie e correlazioni non singolari in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. *Giornale di Battaglini*, vol. 44, 1906.

<sup>2</sup> C. SEGRE, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, ser. 3a, vol. XIX, 1884.

C. SEGRE, Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, ser. 2a, vol. 37, 1886.

<sup>3</sup> BERTINI, Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque. *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, ser. 2a, vol. 20, 1887.

<sup>4</sup> PREDELLO, Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. *Annali di matematica*, vol. 17, 1890.

PREDELLO, Sulla teoria generale delle omografie. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. 27, 1891.

<sup>5</sup> DEL PRETE, Le omografie e correlazioni permutabili tra loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. *Giornale di Battaglini*, vol. 37 e 38, 1899, 1900.

<sup>6</sup> K. KOMMERELL, Klassifikation der Raumkorrelationen. *Math. Zeitschrift*, 10 Bd., 1921.

Sa classification est basée sur la généralisation de la classification affine des quadriques. Il distingue seulement deux groupes de corrélations dans l'espace, à savoir: la corrélation centrale et la corrélation parabolique. Dans le dernier groupe se trouvent quatre classes de corrélations. Toutes ces corrélations sont étudiées géométriquement.

La classification des transformations corrélatives planes se trouve aujourd'hui dans tous les livres d'enseignement concernant la géométrie projective <sup>7</sup>.

Dans ce Mémoire nous ferons la classification des corrélations régulières qui se trouvent, soit dans un plan soit dans un espace à trois dimensions, à l'aide des trois propriétés projectives invariantes, à savoir: à l'aide des couples involutifs, à l'aide de la qualité et de la position réciproque des coniques ou des quadriques fondamentales de la corrélation. Nous montrerons que le nombre de couples involutifs, la qualité et la position réciproque des surfaces fondamentales forment la propriété caractéristique d'un cas de la corrélation.

Dans la première partie de notre Mémoire nous emploierons cette propriété à la classification de la corrélation en groupes et plus tard (dans la seconde partie) nous écrirons les équations des corrélations de ces groupes différents seulement quant à cette propriété.

### 1. — LEMMES.

Soit A la matrice à  $n$  colonnes des éléments  $a_{ik}$ , ( $i, k = 1, \dots, n$ ) et soient  ${}^i x$ ,  ${}^i \xi$ , etc. ( $i = 1, 2$ ) les matrices des coordonnées d'un point ou d'un plan qui appartient à l'espace  $i^{\text{ième}}$ ; c'est-à-dire

$${}^i x = \begin{pmatrix} {}^i x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ {}^i x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ {}^i x_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.} \quad (1)$$

<sup>7</sup> O. VELEN — J. W. JOUNG, *Projective Geometry*, I, p. 278.

A. COMMESSATTI, *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva*, II, p. 252.

J. VOJTECH, *Geometrie projektivní*, p. 296.

Voir aussi: P. LÉVY, Sur les transformations corrélatives. *Bulletin Soc. mathématique de France*, 1929.

L'équation d'une corrélation régulière qui existe entre les espaces  ${}^1\Sigma$ ,  ${}^2\Sigma$  est la suivante:

$${}^2\xi = A \cdot {}^1x, \quad (2)$$

où  $A$  est la matrice régulière, c'est-à-dire  $\text{Dét. } |A| \neq 0$ .

La corrélation qui est donnée par (2) est appelée la corrélation  $A$ .

A l'hyperplan  ${}^1\xi$  correspond, dans  $A$  régulière, le point  ${}^2x$  déterminé par l'équation

$${}^2x = \bar{A}^{-1} \cdot {}^1\xi. \quad (3)$$

La démonstration est évidente.

Dans ce qui suit, nous nous occuperons des corrélations  $A$  régulières qui existent entre deux espaces collocaux, c'est-à-dire nous supposerons que l'on ait  $\text{Dét. } |A| \neq 0$  et  ${}^1\Sigma \equiv {}^2\Sigma$ .

THÉORÈME 1. — Quand et uniquement quand tous les éléments correspondants dans les deux espaces coïncident, la matrice  $A$  est demi-symétrique. Cette corrélation est régulière uniquement quand la dimension (à savoir le nombre  $n - 1$ ) est un nombre impair <sup>8</sup>.

La corrélation considérée s'appelle *système nul* ou *corrélation nulle*.

*Démonstration:* a) Quand on a

$${}^2\bar{\xi} \cdot {}^1x = 0$$

pour n'importe quel  ${}^1x$ , c'est-à-dire

$${}^1\bar{x} \cdot A \cdot {}^1x = 0,$$

la matrice de cette forme quadratique est égale à zéro.

Or

$$A + \bar{A} = 0, \quad \text{ou} \quad A = -\bar{A}.$$

b) Si nous poursuivons la succession d'idées, nous obtiendrons

$${}^2\bar{\xi} \cdot {}^1x = 0$$

pour n'importe quel  ${}^1x$ .

<sup>8</sup> Si  $n = 2$  (sur une droite), nous avons l'homographie.



On trouve de même

$${}^1\bar{\xi} \cdot {}^2x = 0 .$$

c) La matrice demi-symétrique et d'ordre impair n'est jamais régulière.

THÉORÈME 2. — Le système nul est la corrélation involutive.

*Démonstration:* Au point  ${}^1x \equiv {}^2x$  correspondent les hyperplans

$${}^2\xi = A \cdot {}^1x , \quad {}^1\xi = \bar{A} \cdot {}^1x .$$

Si nous supposons  $A = -\bar{A}$ , il vient  ${}^2\xi \equiv {}^1\xi$ .

THÉORÈME 3. — Si A n'est pas la corrélation nulle, les points du premier espace et aussi du deuxième espace, qui coïncident avec leurs hyperplans correspondants, forment une seule hyperquadrique.

Nous appelons cette surface la quadrique ponctuelle fondamentale et nous la désignons par  $K_1$ .

*Démonstration:* Si

$${}^2\bar{\xi} \cdot {}^1x = 0$$

et respectivement

$${}^1\bar{\xi} \cdot {}^2x = 0 ,$$

on a

$${}^1\bar{x} \cdot \bar{A} \cdot {}^1x = 0$$

et respectivement

$${}^2\bar{x} \cdot \bar{A} \cdot {}^2x = 0 .$$

Ce sont les équations de la même hyperquadrique à matrice  $A + \bar{A}$ .

THÉORÈME 4. — Si A n'est pas la corrélation nulle, les hyperplans du premier espace et aussi du deuxième espace, qui coïncident avec leurs points correspondants, enveloppent une seule hyperquadrique.

C'est la deuxième quadrique fondamentale de la corrélation A. Nous la désignons par  $K_2$ .

*Démonstration* semblable à celle faite plus haut.

L'équation de  $K_2$  est

$${}^1\bar{\xi} \cdot (A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^1\xi = 0 .$$

THÉORÈME 5. — N'importe quelle quadrique fondamentale correspond à l'autre dans la corrélation A.

La démonstration en est immédiate.

THÉORÈME 6. — Les quadriques fondamentales  $K_1, K_2$  ont la même caractéristique (*rang*)<sup>9</sup>.

*Démonstration* :

$$A^{-1} + \bar{A}^{-1} = A^{-1} \cdot (A + \bar{A}) \cdot \bar{A}^{-1}.$$

THÉORÈME 7. — Si nous faisons la correspondance entre les points de l'espace et leurs plans polaires par rapport à la quadrique régulière  ${}^1\bar{x} \cdot B \cdot {}^1x = 0$  (où B est la matrice symétrique), nous obtenons la corrélation involutive, régulière, à savoir  ${}^2\xi = B \cdot {}^1x$ . Les quadriques fondamentales de cette corrélation se confondent avec la quadrique donnée; la corrélation est appelée polarité.

Inversement: Si la matrice A est symétrique, la corrélation A est la polarité par rapport à la surface  ${}^1\bar{x} \cdot A \cdot {}^1x = 0$ .

*Démonstration*: Le plan polaire d'un point  ${}^1x$  par rapport à la quadrique  ${}^1\bar{x} \cdot B \cdot {}^1x = 0$  (où  $|B| \neq 0$ ) est  ${}^2\xi = \bar{B} \cdot {}^1x = B \cdot {}^1x$ . La corrélation  ${}^2\xi = B \cdot {}^1x$  possède évidemment les propriétés énoncées.

Si A est la matrice symétrique, l'équation  ${}^2\xi = A \cdot {}^1x$  détermine le plan polaire du point  ${}^1x$  par rapport à la quadrique  ${}^1\bar{x} \cdot A \cdot {}^1x = 0$ .

THÉORÈME 8. — Si la dimension de l'espace pris en considération (à savoir le nombre  $n - 1$ ) est un nombre impair, il existe deux corrélations involutives, à savoir, le système nul et la polarité. Si la dimension est paire, il existe une seule corrélation involutive, à savoir la polarité.

*Démonstration*: Si A est la corrélatrice involutive, on a l'identité  $\rho \cdot A \cdot {}^1x = \bar{A} \cdot {}^1x$  ( $\rho \neq 0$  est une constante), pour n'importe quelle valeur  ${}^1x$ . En raison de cette équation nous pouvons écrire  $\rho \cdot A = \bar{A}$ , ou  $\rho a_{ik} = a_{ki}$ , c'est-à-dire  $\rho^2 a_{ik} = a_{ik}$ ,  $\rho = \pm 1$ ; (au moins une valeur  $a_{ik}$  est différente de zéro).

Enfin  $\bar{A} = \pm A$ .

<sup>9</sup> Le rang (la caractéristique) de la quadrique est égal au rang (à la caractéristique) du discriminant de cette surface.

THÉORÈME 9. — Tous les points et de même tous les plans des couples involutifs appartenant à la corrélation A sont justement tous les points ou les plans doubles de l'homographie  ${}^1x' = \bar{A}^{-1} \cdot A \cdot {}^1x$ .

C'est pourquoi la corrélation A possède au moins une paire involutive.

*Démonstration:* Si  $({}^1x; {}^2\xi)$  est une paire involutive de la corrélation A, on déduit:

$${}^2\xi = A \cdot {}^1x, \quad \rho \cdot {}^1x = \bar{A}^{-1} \cdot {}^2\xi.$$

c'est-à-dire  $\rho \cdot {}^1x = \bar{A}^{-1} \cdot A \cdot {}^1x$ . Or, le point  ${}^1x$  est le point double de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ .

La succession d'idées peut être achevée.

THÉORÈME 10. — Soit  $({}^1x; {}^2\xi)$  un couple involutif de la corrélation A et que  ${}^1x$  (resp.  ${}^2\xi$ ) ne soit pas un élément singulier de la surface  $K_1$  (resp.  $K_2$ ). Ensuite  ${}^2\xi$  est le plan polaire du point  ${}^1x$  par rapport à  $K_1$ , le point  ${}^1x$  est le pôle du plan  ${}^2\xi$  par rapport à  $K_2$ .

*Démonstration:* D'après la supposition nous avons

$$\rho \cdot A \cdot {}^1x = \bar{A} \cdot {}^1x$$

respectivement

$$\rho \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = \bar{A}^{-1} \cdot {}^2\xi.$$

C'est-à-dire

$$(A + \bar{A}) \cdot {}^1x = (1 + \rho) \cdot A \cdot {}^1x = {}^2\xi \cdot (1 + \rho)$$

respectivement

$$(A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi = (1 + \rho) \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = {}^1x \cdot (1 + \rho).$$

THÉORÈME 11. — Soit  $({}^1x; {}^2\xi)$  un couple des éléments correspondants dans A et soit  ${}^2\xi$  le plan polaire du point  ${}^1x$  par rapport à  $K_1$  (resp.  ${}^1x$  le pôle du plan  ${}^2\xi$  par rapport à  $K_2$ ).

Alors les éléments  ${}^1x, {}^2\xi$  forment un couple involutif  $({}^1x; {}^2\xi)$  de la corrélation A.

*Démonstration:* On a:

$${}^2\xi = A \cdot {}^1x$$

et aussi

$$\rho \cdot {}^2\xi = (A + \bar{A}) \cdot {}^1x.$$

C'est-à-dire

$$(\rho - 1) \cdot A \cdot {}^1x = \bar{A} \cdot {}^1x .$$

De même

$${}^1x = A^{-1} \cdot {}^2\xi , \quad \rho \cdot {}^1x = (A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi ,$$

ou

$$(\rho - 1) \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = \bar{A}^{-1} \cdot {}^2\xi .$$

THÉORÈME 12. — Au point singulier de la quadrique  $K_1$  correspond involutivement le plan qui est singulier pour  $K_2$  et qui passe par ce point.

*Démonstration:* Soit  ${}^1x$  le point singulier de  $K_1$ ; alors on a

$$(A + \bar{A}) \cdot {}^1x = 0 \quad \text{ou} \quad A \cdot {}^1x = -\bar{A} \cdot {}^1x .$$

C'est-à-dire le point  ${}^1x$  appartient au couple involutif. Soit  ${}^2\xi = A \cdot {}^1x$ ; ensuite nous avons:

$$(A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi = (I + \bar{A}^{-1} \cdot A) \cdot {}^1x = \bar{A}^{-1} \cdot (\bar{A} + A) \cdot {}^1x = 0 ,$$

c'est-à-dire  ${}^2\xi$  est le plan singulier de la quadrique  $K_2$ .

THÉORÈME 13. — Le plan d'une paire involutive qui n'est pas le plan singulier de la surface  $K_2$ , possède tous les points singuliers de la quadrique  $K_1$ . Le point d'un couple involutif qui n'est pas singulier pour la quadrique  $K_1$  est situé dans tous les plans singuliers de la surface  $K_2$ .

*Démonstration:* Elle découle des théorèmes 12 et 10.

## 2. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS PLANES.

THÉORÈME 14. — Les coniques fondamentales de la corrélation plane  $A$  se confondent en une seule conique quand et uniquement quand; la corrélation est la polarité.

*Preuve:* Soit  $K_1 \equiv K_2$ . Ensuite la droite qui correspond au point  ${}^1x$  de la conique  $K_1$  est la tangente de cette courbe en  ${}^1x$ . L'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$  possède chaque point de la conique  $K_1$  pour point double et il en résulte qu'elle est l'identité.

En raison du théorème 8, la corrélation  $A$  est la polarité. Dans ce qui suit nous excluons ce cas et nous supposons que  $A$  ne soit pas la polarité.

THÉORÈME 15. — Quand les coniques fondamentales de la corrélation  $A$  sont les coniques irréductibles nous n'allons distinguer que deux cas:

1° La conique  $K_1$  est tangente à  $K_2$  aux deux points  $a, b$ ; la corrélation  $A$  possède trois couples involutifs  $(a; T_a)$ ,  $(b; T_b)$ ,  $(T_a \times T_b; ab)$ , où  $T_a, T_b$  sont les tangentes communes en  $a$ , respectivement en  $b$ .

2° Les coniques  $K_1$  et  $K_2$  ont, au point  $a$ , le contact quadriponctuel (d'ordre trois); la corrélation  $A$  possède un couple involutif  $(a; T_a)$ , où  $T_a$  est la tangente au point  $a$ .

*Démonstration:* Soit  $a$  le point commun des coniques irréductibles  $K_1, K_2$ . La droite qui correspond involutivement au point  ${}^1a \equiv a$  est la tangente de  $K_2$ . Le théorème 10 montre que cette droite est aussi tangente à  $K_1$  en  $a$ . Il en résulte que les coniques  $K_1$  et  $K_2$  peuvent posséder en commun soit deux points distincts  $a, b$  avec les tangentes  $T_a, T_b$ , soit un seul point  $a$  avec contact quadriponctuel.

1° Dans le premier cas la droite  $ab$  correspond involutivement au point  $0 \equiv (T_a \times T_b)$ . (Voir fig. 1.) La corrélation  $A$  n'a pas les autres couples involutifs. Soit  $(p; P)$  un tel couple; d'après le théorème 10 le point  $p$  est situé sur la droite  $ab$ . Si le point  ${}^1r$  est un point des points communs à la droite  $P$  et à la conique  $K_1$ , il correspond involutivement à la droite  $p{}^1r \equiv {}^2X$ . Ensuite

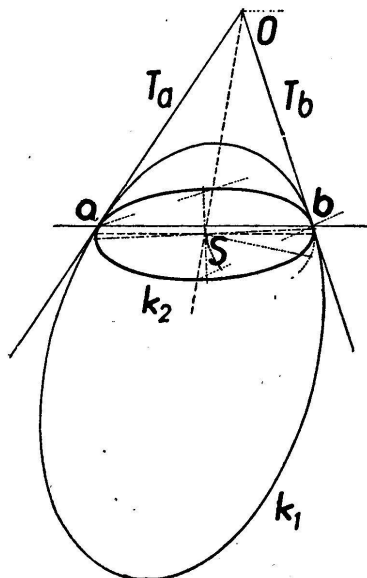


Fig. 1

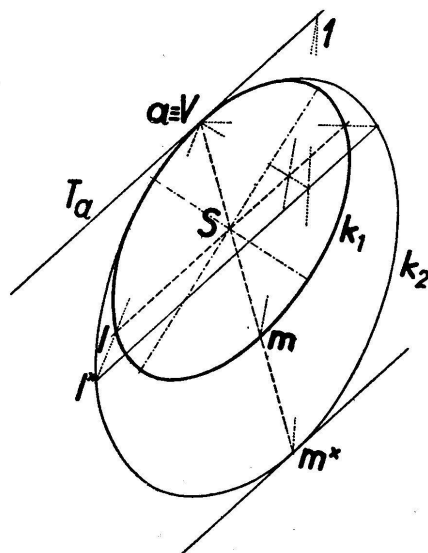


Fig. 2.

l'homographie  $\bar{A}^{-1}$ .  $A$  a quatre points doubles, à savoir:  $a, b, (T_a \times T_b), {}^1r$  qui sont linéairement indépendants, et par suite elle est l'identité, c'est-à-dire que la corrélation  $A$  est la polarité. (*Per absurdum.*)

2° Dans le second cas, nous n'avons qu'un seul couple involutif, à savoir  $(a; T_a)$ . (Voir fig. 2.) Si  $(p; P)$  est un autre couple involutif, le point  $p$  est situé sur la tangente  $T_a$  (d'après le théorème 10). Le point  ${}^1y$  qui est un point des points d'intersection de la conique  $K_1$  et de la droite  $P$  correspond involutivement à la droite  ${}^1yp \equiv {}^2Y$ . C'est-à-dire que la conique  $K_2$  passe par le point  ${}^1y \neq a$ . Mais les coniques  $K_1, K_2$  possèdent en  $a$  le contact d'ordre 3 en commun.

THÉORÈME 16. — Quant à la conique  $K_1$  décomposée en deux droites distinctes  $L, S$  et quant à la conique  $K_2$  décomposée en deux points  $l_1, l_2$ , nous avons seulement un cas.

3° La droite  $L_2 \equiv l_1 l_2$  passe par le point  $l \equiv (L \times S)$ . Ni le point  $l_1$  ni le point  $l_2$  ne peuvent coïncider en  $l$ . La corrélation  $A$  a deux couples involutifs:  $(l; L_2), (s; L_1)$ , où  $s$  est le point de la droite  $L_2$  pour lequel  $(lsl_1 l_2) = -1$  et  $L_1$  est la droite du faisceau  $(l)$  déterminé par le birapport harmonique  $(LSL_1 L_2) = -1$ .

*Démonstration:* Le théorème 12 montre que  $(l; L_2)$  est un couple involutif et que  $l$  est situé sur  $L_2$ . (Voir fig. 3.) La droite  ${}^2S$  du faisceau  $(l)$ , qui correspond au point  ${}^1s \equiv s$  donné sur  $L$  par la relation  $(lsl_1 l_2) = -1$ , forme avec  $s$  un couple involutif d'après le théorème 11.

D'après le théorème 10 nous avons  ${}^2S \equiv L_1$ , où  $L_1$  est la droite du faisceau  $(l)$  pour laquelle  $(LSL_1 L_2) = -1$ . Si un couple  $(p; P)$ , différent de  $(l; L_2)$ , est un couple involutif de la corrélation  $A$ , nous déduirons, d'après le théorème 13, que  $p$  est situé sur  $L_1$ , c'est-à-dire  $P \equiv L_1, p \equiv s$ .

THÉORÈME 17. — Si la conique  $K_1$  est dégénérée en droite double  $L$  et si la conique  $K_2$  est le point double  $l$ , on peut démontrer que:

4° Le point  $l$  n'est pas situé sur la droite  $L$ . La corrélation  $A$  possède le couple  $(l; L)$  involutif et le faisceau des couples  $(x; X)$

involutifs, où  $x$  parcourt la droite  $L$  et où  $X$  est la droite  $xl$ .  
(Voir fig. 4.)

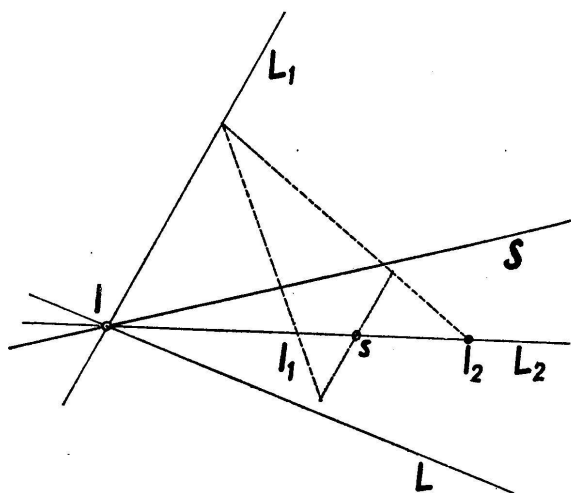


Fig. 3.

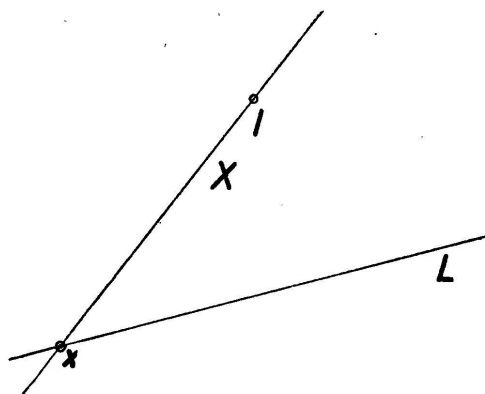


Fig. 4.

La démonstration est simple.

THÉORÈME 18. — Si nous choisissons convenablement le système des coordonnées, nous pouvons écrire pour la corrélation du premier ou du quatrième cas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Quand, et uniquement quand  $a_{21} \neq \pm a_{12}$ , nous obtenons le premier cas et, quand et uniquement quand  $a_{21} = -a_{12}$ , nous obtenons le quatrième.

*Preuve:* Nous choisirons dans le premier cas:  $a \equiv o_1$ ,  $b \equiv o_2$ ,  $(T_a \times T_b) \equiv o_3$ ; dans le quatrième:  $l \equiv o_3$ ; les deux points de la droite  $L_2$ , qui sont distincts et différents de  $l$ , seront pris pour  $o_2$ , respectivement  $o_3$ .

Si  $a_{21} = a_{12}$ , la corrélation est la polarité. (D'après le théorème 7.) Si  $a_{21} = -a_{12}$ , la conique  $K_1$  est la droite double.

THÉORÈME 19. — La corrélation du cas 3<sup>o</sup> peut être écrite:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{11} \neq 0.$$

*Preuve:* Soit  $s \equiv o_3$ ,  $L_1 \equiv x_3 = 0$ ,  $l \equiv o_2$ .

Comme  $K_1$  est la conique décomposée en deux droites  $L, S$  qui passent par  $o_2$ , on a  $a_{21} = -a_{12}$ ,  $a_{11} \neq 0$ .

THÉORÈME 20. — La corrélation du cas 2<sup>o</sup> peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{21} \neq 0.$$

Démonstration: Soit  $a \equiv o_3$ ,  $T_a \equiv x_1 = 0$ .

Soit  $o_2$  un point arbitraire sur  $T_a$  et soit  $x_2 = 0$  la droite qui correspond au point  $o_2$  en  $A$ . Enfin soit  $o_1$  le point d'intersection de la conique  $K_1$  avec la droite  $x_2 = 0$ . (Voir fig. 5.)

Les droites qui correspondent au point  $(0 : y_2 : y_3)$  dans les deux espaces pris en considération sont:

$${}^2(a_{13}y_3 : a_{22}y_2 : 0), \quad {}^1((a_{21}y_2 + a_{31}y_3) : a_{22}y_2 : 0).$$

L'équation  $a_{13}y_3 : a_{22}y_2 = (a_{21}y_2 + a_{31}y_3) : a_{22}y_2$  a (d'après le théorème 15) une unique solution, à savoir:  $y_2 = 0$ ; alors nous aurons  $a_{31} = a_{13}$ ;  $a_{21} \neq 0$ .

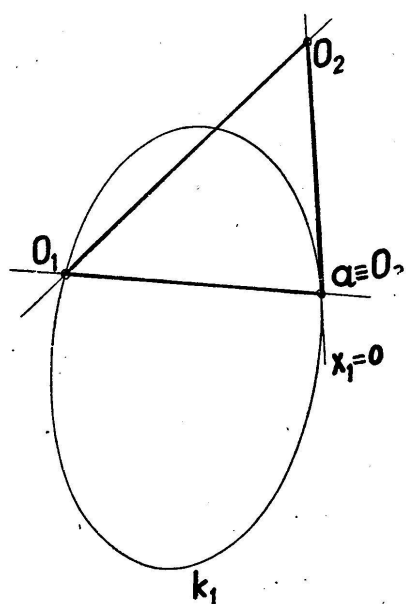


Fig. 5.

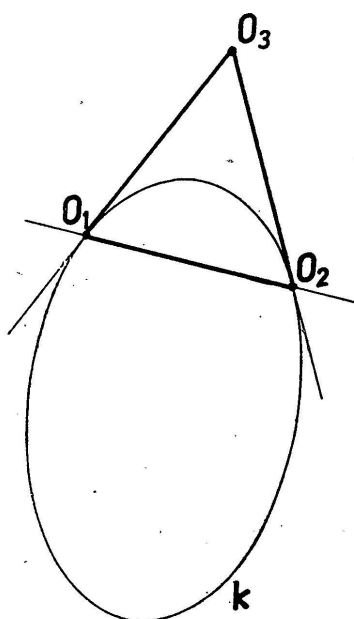


Fig. 6.



THÉORÈME 21. — La polarité plane peut être écrite d'une des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le choix des systèmes des coordonnées est évident. (Voir fig. 6 et 7.)

### 3. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

THÉORÈME 22. — Chaque corrélation régulière dans l'espace possède un couple involutif des éléments qui coïncident.

*Démonstration:* Le théorème 9 montre que chaque corrélation  $A$  a un couple involutif  $({}^1a; {}^2\alpha)$ . Soit le point  ${}^1a$  en dehors du plan  ${}^2\alpha$ . Les plans  ${}^2\xi$ , qui correspondent aux points  ${}^1x$  du plan  ${}^2\alpha$ , coupent  ${}^2\alpha$  aux droites  ${}^2X$ . Les éléments des couples  $({}^1x; {}^2X)$  correspondent l'un à l'autre dans une corrélation plane  $B$  non singulière (Dét.  $|B| \neq 0$ ) qui possède un couple involutif des éléments coïncidents. Ensuite le plan déterminé par le point  ${}^1a$  et par la droite  ${}^2B$  correspond involutivement au point  ${}^1b$  dans  $A$ .

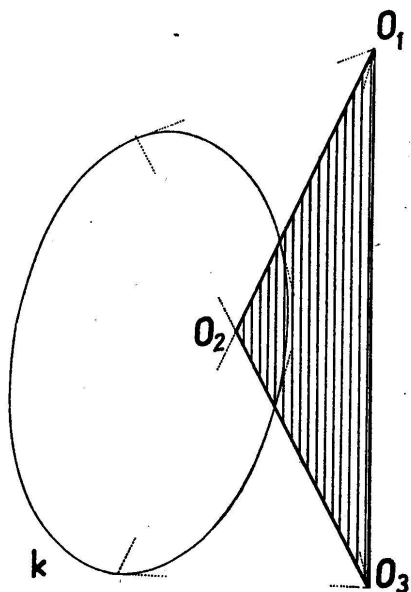


Fig. 7.

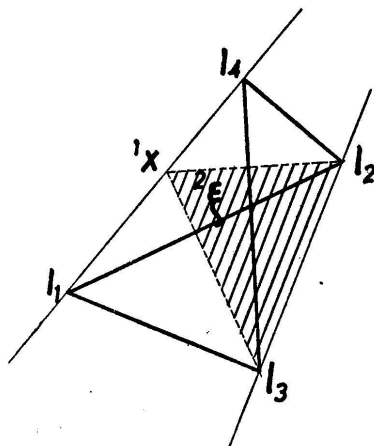


Fig. 8.

THÉORÈME 23. — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation A ont le rang 4, cinq cas vont se présenter :

1° Les quadriques  $K_1, K_2$  possèdent un quadrilatère gauche  $l_1 l_2 l_3 l_4$  en commun. La corrélation a quatre couples involutifs :

$$(l_1; \lambda_1), \quad (l_2; \lambda_2), \quad (l_3; \lambda_3); \quad (l_4; \lambda_4)$$

où

$$\lambda_1 \equiv (l_1 l_2 l_3), \quad \lambda_2 \equiv (l_1 l_2 l_4), \quad \lambda_3 \equiv (l_1 l_3 l_4), \quad \lambda_4 = (l_2 l_3 l_4).$$

(Voir fig. 8.)

2°  $K_1, K_2$  possèdent un quadrilatère gauche  $l_1 l_2 l_3 l_4$  en commun. La corrélation a les couples involutifs suivants :  $(l_2; \lambda_2), (l_3; \lambda_3), ({}^1x; {}^2\xi)$ , où  $\lambda_2, \lambda_3$  sont les plans, mentionnés plus haut et où le point  ${}^1x$  parcourt la droite  $l_1 l_4$ ; le plan  ${}^2\xi$  est déterminé par les points  ${}^1x, l_2, l_3$ . (Voir fig. 8.)

3°  $K_1, K_2$  possèdent les droites, de système gauche,  $L_2, L_3$  et leur transversale double  $l_4 l_3$  en commun. La corrélation a deux couples involutifs :  $(l_3; \lambda_3), (l_4; \lambda_4)$ , où  $\lambda_3 \equiv (l_4, L_3), \lambda_4 \equiv (l_3, L_2)$ . (Voir fig. 9.)

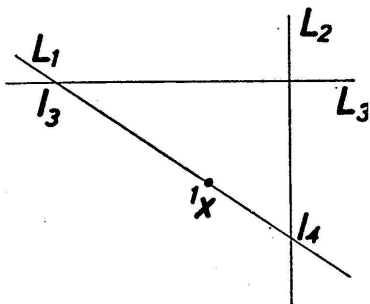


Fig. 9.

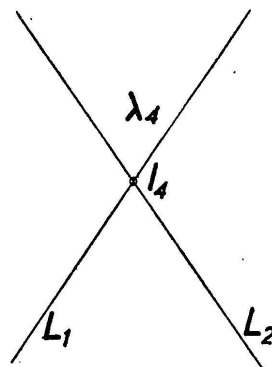


Fig. 10.

4°  $K_1, K_2$  possèdent les droites de système gauche  $L_2, L_3$  et leur transversale double  $l_4 l_3$  en commun. La corrélation a un faisceau des couples involutifs  $({}^1x; {}^2\xi)$ , où  ${}^1x$  parcourt la droite  $l_4 l_3$ ;  ${}^2\xi$  est un plan du faisceau  $(l_4 l_3)$ . (Voir fig. 9.) (Le plan  $(l_3, L_2)$  correspond au point  $l_4$  et le plan  $(l_4, L_3)$  correspond au point  $l_3$ .)

5°  $K_1, K_2$  possèdent deux droites doubles  $L_1, L_2$  (qui se coupent au point  $l_4$ ) en commun, c'est-à-dire que les surfaces  $K_1, K_2$  sont tangentes l'une à l'autre le long des droites  $L_1, L_2$ . (Voir fig. 10.)

La corrélation a un unique couple involutif, à savoir  $(l_4; \lambda_4)$ , où  $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$ .

*Démonstration:* D'après le théorème 22 il existe un point  $l_4$  qui correspond au plan  $\lambda_4$  et qui coïncide avec ce plan. Ce plan est tangent à la quadrique  $K_1$  au point  $l_4$  (d'après le théorème 10). Alors, il coupe  $K_1$  aux droites  $L_1, L_2$ . Les droites  $L_1, L_2$  sont les droites doubles d'une homographie  $B$  induite en  $\lambda_4$  par l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ , qui a le plan  $\lambda_4$  pour le plan double. La position des points doubles  $l_2, l_3$  de l'homographie  $B$  et par suite de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$  donne trois cas:

a) Les points  $l_2, l_3$  sont situés sur les deux droites  $L_1, L_2$ . Les plans  ${}^2\lambda_2 \equiv \lambda_2, {}^2\lambda_3 \equiv \lambda_3$  qui correspondent aux points  ${}^1l_2 \equiv l_2, {}^1l_3 \equiv l_3$  en corrélation  $A$ , possèdent avec la quadrique respectivement les droites  $l_4l_2, l_4l_3$  en commun. Ces plans se coupent en une droite qui coupe la quadrique  $K_1$  (excepté le point  $l_4$ ) au point  $l_1$ . Le plan  ${}^2\lambda_1 \equiv \lambda_1$  qui correspond à ce point  ${}^1l_1 \equiv l_1$  possède les points  $l_1l_2l_3$ . Nous avons ainsi obtenu les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> mentionnés plus haut.

b) Seulement un point (par exemple le point  $l_3$ ) est situé sur  $L_1$  mais aucune des droites de la quadrique  $K_1$ , qui sont situées en  $\lambda_4$  (c'est-à-dire  $L_2$ ) ou en  $\lambda_3$  (c'est-à-dire  $L_3$ ) ne contiennent plus de point double de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ . Dans le cas qui nous occupe nous obtiendrons les cas 3<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup>.

c) Aucune droite des  $L_1, L_2$  (en  $\lambda_4$ ) ne contient un point double de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ . C'est le cinquième cas de notre théorème. Le plan  ${}^2\lambda_4 \equiv \lambda_4$ , qui correspond au point  ${}^1l_4 \equiv l_4$  en  $A$ , possède avec la quadrique  $K_1$  deux droites  $L_1, L_2$  en commun, qui sont aussi les droites de la quadrique  $K_2$ , parce qu'elles sont les axes des faisceaux des plans tangents à la quadrique  $K_1$ .

Or, dans le cas a) les surfaces  $K_1, K_2$  ont un quadrilatère gauche en commun, dans le cas b) elles possèdent uniquement les droites  $L_2, L_3$  et leur transversale  $L_1 \equiv l_3l_4$  en commun.

Soit  ${}^1R$  une autre droite commune aux quadriques  $K_1, K_2$ . La droite  ${}^1R$  est une transversale des droites  $L_2, L_3$ . La droite  ${}^2R$  qui correspond à  ${}^1R$  en corrélation  $A$ , soit coïncide avec  ${}^1R$  soit ne coupe jamais la droite  ${}^1R$ . Si  ${}^1R \equiv {}^2R$ , nous obtiendrons les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup>. Si  ${}^1R$  et  ${}^2R$  sont les droites gauches, la droite  ${}^2R$

coïncide avec  $L_1 \equiv l_3l_4$ , parce que  ${}^2R$  est aussi la droite commune aux surfaces  $K_1, K_2$ . Or,  ${}^1R \equiv L_1$ .

Dans le dernier cas *c*) les quadriques  $K_1, K_2$  possèdent uniquement les droites  $L_1, L_2$  en commun et point d'autres. Si nous supposons que  $R$  soit une autre droite commune aux  $K_1$  et  $K_2$ , nous déduirons soit que  $R$  coupe  $L_1$  mais jamais  $L_2$ , soit que  $R$  coupe  $L_2$ , mais non  $L_1$ . Or, c'est le cas *b*) considéré plus haut. Si les quadriques  $K_1, K_2$  ont un quadrilatère gauche commun, la corrélation  $A$  possède soit uniquement quatre couples involutifs que nous avons déjà pris en considération, et le cas 1<sup>o</sup> se présente, soit, outre quatre couples mentionnés, un autre couple involutif ( ${}^1p; {}^2\pi$ ). Le point  ${}^1p$  est situé dans un plan du tétraèdre  $l_1l_2l_3l_4$ , mais jamais sur un côté du quadrilatère gauche. (Dans ce dernier cas la surface  $K_1$  est tangente à la quadrique  $K_2$  le long du côté mentionné.) (Voir théorème 10.) Alors le point  ${}^1p$  est situé sur  $l_1l_4$  ou  $l_2l_3$ . Ensuite, d'après théorème 9, n'importe quel point de cette droite est le point d'un couple involutif. C'est ce qui, en effet, a lieu tout au plus pour l'une des droites  $l_1l_4, l_2l_3$ . (Voir théorème 27.) Nous obtenons ainsi le cas 2<sup>o</sup>.

Si les surfaces  $K_1, K_2$  possèdent un quadrilatère gauche incomplet en commun, la corrélation  $A$  a soit seulement deux couples involutifs, énoncés plus haut (cas 3<sup>o</sup>), soit, outre ces couples, un autre couple involutif ( ${}^1p; {}^2\pi$ ). Le point  ${}^1p$  doit être situé sur le côté  $l_3l_4$ . Dans le cas contraire la transversale  $X$  des droites gauches  $L_2L_3$ , passant par le point,  ${}^1p$  est la droite double de l'homographie  $\bar{A}^{-1} . A$ . (Voir théorème 9.) C'est-à-dire : Un point des points d'intersection  $(X \times L_2), (X \times L_3)$  au moins, est un autre point double de cette homographie. (Mais ce n'est pas notre supposition.) Ensuite n'importe quel point de la droite  $l_3l_4$  est le point d'un couple involutif — d'après le théorème 9. C'est le cas 4<sup>o</sup> qui a lieu.

Enfin si  $K_1, K_2$  sont tangentes l'une à l'autre le long de deux droites  $L_1, L_2$  qui se coupe en  $l_4$ , la corrélation  $A$  possède évidemment un unique couple involutif, à savoir :  $(l_4; \lambda_4)$ , où  $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$ . Nous obtenons le cas 5<sup>o</sup>.

**THÉORÈME 24.** — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation  $A$  ont le rang 3, c'est-à-dire que  $K_1$  est l'ensemble des

points du cône irréductible (au sommet  $\nu$ ), et que  $K_2$  est l'ensemble des plans qui ont pour enveloppée une conique irréductible  $K$  du plan  $\alpha$ , les cas suivants vont se présenter:

6° Le plan  $\alpha$  coupe le cône  $K_1$  en les deux droites distinctes  $L_1, L_2$ , qui sont les tangentes de la conique  $K$  aux points  $l_1, l_2$ . La corrélation a trois couples involutifs:  $(\nu; \alpha)$ ,  $(l_1; \lambda_1)$ ,  $(l_2; \lambda_2)$ , où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les plans tangents du cône  $K_1$  le long de la droite  $L_1$  respectivement  $L_2$ . (Voir fig. 11.)

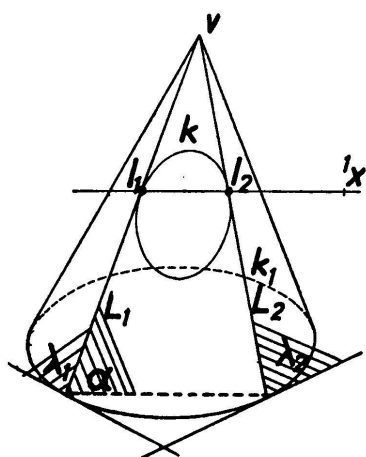


Fig. 11,

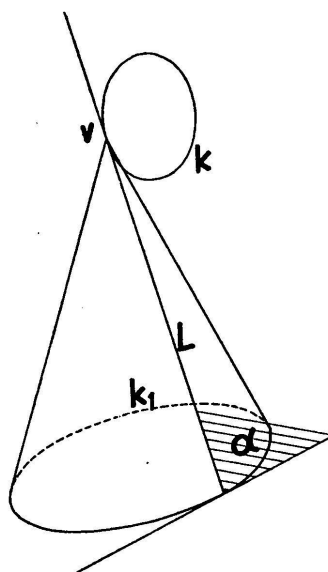


Fig. 12.

7° La position du cône  $K_1$  et de la conique  $K$  est la même que dans le cas précédent (6°). La corrélation possède les couples involutifs:  $(\nu; \alpha)$ ,  $({}^1x; {}^2\xi)$ , où le point  ${}^1x$  parcourt la droite  $l_1l_2$ . (Voir fig. 11.)

8° Le plan  $\alpha$  est tangent au cône le long de la droite  $L$ . La conique  $K$  est tangente à cette droite au point  $\nu$ . La corrélation a un seul couple involutif, à savoir  $(\nu; \alpha)$ . (Voir fig. 12.)

*Démonstration:* Le couple  $(\nu; \alpha)$  est le couple involutif — d'après le théorème 12 — et le plan  $\alpha$  possède le point  $\nu$ .

a) Soit  $\alpha$  le plan qui coupe le cône  $K_1$  aux deux droites différentes  $L_1, L_2$ . Une droite au moins (par exemple  $L_1$ ) coupe la conique  $K$  au point  $l_1$  différent du sommet  $\nu$ . Par suite les plans, qui correspondent aux points de la droite  $L_1$  (ils forment un faisceau de l'axe  $L_1$ ) sont tangents à la conique  $K$ , la droite  $L_1$  est aussi la tangente de la courbe  $K$  au point  $l_1$ . De la même manière nous déduirons que la droite  $L_2$  est tangente à  $K$  en  $l_2$ .

Les plans qui correspondent aux points  $l_1, l_2$  forment avec ces points les couples involutifs (d'après le théorème 11). Ce sont les plans  $\lambda_1, \lambda_2$  qu'il y a lieu de considérer.

Si le cas 6° n'a pas lieu, la corrélation possède outre les couples  $(\nu; \alpha), (l_1; \lambda_1), (l_2; \lambda_2)$  une autre paire involutive, à savoir  $({}^1x; {}^2\xi)$ . D'après le théorème 10 le point  ${}^1x$  est situé sur la droite  $l_1l_2$ . Or, en raison du théorème 9, n'importe quel point de la droite  $l_1l_2$  appartient à une paire involutive. C'est le cas 7° qui se produit.

b) Soit maintenant  $\alpha$  le plan qui est tangent au cône  $K_1$  le long de la droite  $L$ . La corrélation  $A$  transforme la figure géométrique formée par les éléments  $(K_1, \alpha, L)$  en figure formée par  $(K, \nu, L)$  c'est-à-dire que la droite  $L$  est tangente à  $K$  en  $\nu$ . Si  $({}^1x; {}^2\xi)$  est un couple involutif et différent de  $(\nu; \alpha)$ , le point  ${}^1x$  est situé sur  $L$ . On en déduit que le plan  ${}^2\xi$  possède la droite  $L$ ; mais ce n'est jamais possible d'après le théorème 10. Or, le cas 8° a lieu.

THÉORÈME 25. — Si les surfaces  $K_1, K_2$  ont le rang 2, c'est-à-dire si  $K_1$  est une paire de plans  $\alpha, \beta$  et  $K_2$  est un couple des points  $a, b$ , nous avons trois cas :

9° Le point  $a$  est situé dans le plan  $\alpha$ , le point  $b$  en  $\beta$ ; les droites  $ab, (\alpha \times \beta)$ , sont les droites formant système gauche. (Voir fig. 13.) La corrélation  $A$ , prise en considération, possède les couples involutifs suivants :

$$(a; \alpha), \quad (b; \beta), \quad ({}^1x; {}^2\xi),$$

où  ${}^1x$  parcourt la droite  $(\alpha \times \beta)$  et  ${}^2\xi$  est le plan du faisceau  $(ab)$ , à savoir  ${}^2\xi \equiv ({}^1xab)$ .

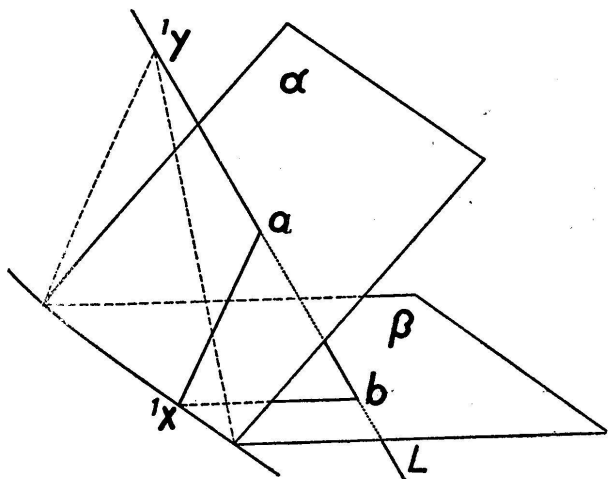


Fig. 13.

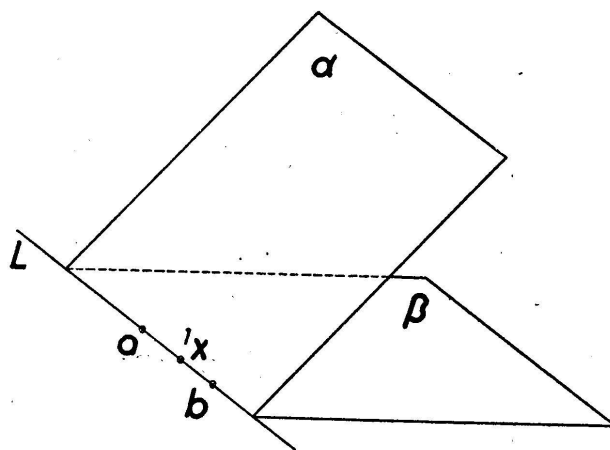


Fig. 14.

10° La position des  $K_1, K_2$  est la même que dans le cas précédent. La corrélation possède les couples involutifs  $({}^1x; {}^2\xi)$ ,  $({}^1y; {}^2\eta)$ , où  ${}^1x$  parcourt la droite d'intersection  $(\alpha \times \beta)$ ,  ${}^1y$  parcourt la droite qui joint les points  $a, b$  et les plans  ${}^2\xi, {}^2\eta$  sont déterminés de la manière suivante: (Voir fig. 13.)

$${}^2\xi \equiv ({}^1x a b), \quad {}^2\eta \equiv [{}^1y, (\alpha \times \beta)].$$

11° La droite qui joint les points  $a, b$  coïncide avec la droite d'intersection des plans  $\alpha, \beta$ . La corrélation possède les paires involutives  $({}^1x; {}^2\xi)$ , où  ${}^1x$  parcourt la droite  $ab$  et où  ${}^2\xi$  possède la droite  $(\alpha \times \beta)$ . (Voir fig. 14.)

*Démonstration:* Soit  $L$  l'axe du faisceau des plans qui correspondent aux points de la droite  $(\alpha \times \beta)$  en corrélation  $A$ . L'axe  $L$  est formé avec  $(\alpha \times \beta)$  dans une paire gauche de droites, ou coïncide avec  $(\alpha \times \beta)$ .

a) Soient  $L, (\alpha \times \beta)$  les droites formant système gauche. Les points  ${}^1x, {}^2x$  qui correspondent au plan  $\alpha \equiv {}^1\alpha \equiv {}^2\alpha$ , sont situés dans le plan  $\alpha$ .

Dans le cas contraire les plans qui correspondent aux points du plan  $\alpha$  coupent  $\alpha$  aux droites qui correspondent aux mêmes points en corrélation  $B$  (Dét.  $|B| \neq 0$ ). Mais cette corrélation possède uniquement les paires dont les éléments coïncident — ce qui n'a jamais lieu. Par conséquent les points  ${}^1x, {}^2x$  sont situés sur  $L$ ; on a  ${}^1x \equiv {}^2x \equiv (L \times \alpha)$ . Ce point est aussi un des points  $a, b$  (de la conique  $K_2$ ).

Soit par exemple  ${}^1x \equiv a$ ; ensuite il y a  $b \equiv (L \times \beta)$ .

Si la corrélation  $A$  n'a d'autre paire involutive, le cas 9° se produit. Dans le cas contraire nous aurons un autre couple  $({}^1x; {}^2\xi)$ . D'après le théorème 13 le point  ${}^1x$  doit être situé sur  $ab$  et n'importe quel point de cette droite correspond involutivement à un plan et forme avec lui une paire involutive. Le cas 10° a lieu.

b) Si  $L \equiv (\alpha \times \beta)$ , les points  $a, b$ , sont situés aussi sur  $(\alpha \times \beta)$ . D'après le théorème 13 il n'est point d'autres points des couples involutifs en dehors de la droite  $ab$ . Le cas 11° va se présenter.



THÉORÈME 26. — Si les quadriques fondamentales ont le rang 1, c'est-à-dire si  $K_1$  est le plan double  $\alpha$  et si  $K_2$  est le point double  $a$ , une seule possibilité se produit.

12° Le point  $a$  est situé dans le plan  $\alpha$  et forme avec ce plan une paire involutive de la corrélation A. La corrélation possède les couples involutifs  $(^1x; ^2\xi)$ , où  $^1x$  parcourt le plan  $\alpha$ ,  $^2\xi$  passe par le point  $a$ .

*Preuve:* Les points  $^1a, ^2a$  qui correspondent au plan  $\alpha$  sont situés dans le plan  $\alpha$ . D'après le théorème 12 (et par analogie avec la démonstration du théorème 25 a) nous avons  $^1a \equiv ^2a \equiv a$ . Enfin il n'existe pas d'autre couple involutif  $(^1x; ^2\xi)$  pour lequel  $^1x$  ne soit pas situé dans  $\alpha$ . Dans le cas contraire on a  $^2\xi \equiv \alpha$  (d'après le théorème 13); mais ce n'est jamais possible.

Dans ce qui suit, nous divisons les cas 1° à 12°, que nous avons pris en considération, en les quatre groupes suivants:

- En I<sup>er</sup> groupe sont les cas: 1°, 2°, 9°, 10°;
- en II<sup>e</sup> groupe sont les cas: 5°, 6°, 7°, 12°;
- en III<sup>e</sup> groupe sont les cas: 3°, 4°, 11°;
- en IV<sup>e</sup> groupe est le cas: 8°.

THÉORÈME 27. — Les corrélations du premier groupe peuvent être écrites de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les cas particuliers aient lieu sont dans:

- le cas 1°:  $a_{41} \neq a_{14}$ ,  $a_{32} \neq \pm a_{23}$  ;
- le cas 2°:  $a_{41} = a_{14}$ ,  $a_{32} \neq \pm a_{23}$  ;
- le cas 9°:  $a_{41} = -a_{14}$ ,  $a_{32} \neq \pm a_{23}$  ;
- le cas 10°:  $a_{41} = -a_{14}$ ,  $a_{32} = -a_{23}$ .

*Démonstration:* Le choix du système des coordonnées dans les cas 1° et 2° est le suivant: Le tétraèdre fondamental est donné par les points  $o_1 \equiv l_1$ ,  $o_2 \equiv l_2$ ,  $o_3 \equiv l_3$ ,  $o_4 \equiv l_4$ .



Dans les cas 9<sup>o</sup> et 10<sup>o</sup> nous choisissons  $o_1 \equiv a$ ,  $o_4 \equiv b$ ; les points  $o_2$  et  $o_3$  sont arbitraires sur la droite  $(\alpha \times \beta)$ . Les plans  ${}^2\eta \equiv (a_{14}y_4 : 0 : 0 : a_{41}y_1)$ ,  ${}^1\eta \equiv (a_{41}y_1 : 0 : 0 : a_{14}y_4)$  qui correspondent au point arbitraire  $(y_1 : 0 : 0 : y_4)$  situé sur  $o_1o_4 \equiv (\alpha \times \beta)$  doivent coïncider. (Voir le cas 9<sup>o</sup>.) On en déduit la relation:  $a_{14}^2 = a_{41}^2$ .

*Appendice à la démonstration du théorème 23:* Il n'est pas possible, dans le cas général, que tous les points des droites  $o_1o_4$ ,  $o_2o_3$  appartiennent aux couples involutifs. Si ce cas se présentait nous pourrions en déduire:  $a_{14} = a_{41}$ ,  $a_{23} = a_{32}$ .<sup>10</sup> D'après le théorème 7 la polarité a lieu.

**THÉORÈME 28.** — La matrice des corrélations du deuxième groupe est la suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{11} \neq 0.$$

Le cas 5<sup>o</sup> se présente quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq \pm a_{14}, \quad a_{23} \neq \pm a_{32};$$

pour le cas 6<sup>o</sup> il est nécessaire et il suffit que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} \neq \pm a_{23};$$

pour le cas 7<sup>o</sup> que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = a_{23};$$

pour le cas 12<sup>o</sup> que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

*Démonstration:* Le choix du système de coordonnées est le suivant: Dans le cas 5<sup>o</sup>:  $o_4 \equiv l_4$ , le plan  $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$  a l'équation  $x_1 = 0$ ;  $o_2$  est un point sur  $L_2$ , ( $o_2 \neq o_4$ ),  $o_3$  est un point sur  $L_1$ , ( $o_3 \neq o_4$ ). Le plan  $x_3 = 0$  correspond au point  $o_2$  en A et  $x_2 = 0$  correspond au point  $o_3$ . Enfin  $o_1$  est le point d'intersection des droites de la surface  $K_2$  qui sont situées dans les plans  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

<sup>10</sup> Nous obtenons, en tenant compte de la caractéristique de la corrélation A,  $a_{14} \neq -a_{41}$ ,  $a_{23} \neq -a_{32}$ .

Les cas 6<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup>:  $o_4 \equiv v$ ,  $o_2 \equiv l_1$ ,  $o_1 \equiv l_2$ , les plans  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ont les équations  $x_3 = 0$  respectivement  $x_2 = 0$ .

Le cas 12<sup>o</sup>:  $o_4 \equiv a$ , le plan  $\alpha$  a l'équation  $x_1 = 0$ . Les points  $o_2$ ,  $o_3$  sont les points arbitraires dans le plan  $\alpha$ , mais ils ne sont pas situés sur une droite qui passe par  $a$ . Les plans  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  correspondent respectivement aux points choisis  $o_3$ ,  $o_2$ . Le coefficient  $a_{11}$  est différent de zéro afin que les cas du premier groupe n'aient pas lieu. Nous ferons la distinction des cas 5<sup>o</sup>, 6<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup>, par analogie avec celle que nous avons faite dans les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup>.

THÉORÈME 29. — La matrice des corrélations du troisième groupe peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{21} \neq 0.$$

Le cas 3<sup>o</sup> va se présenter quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq -a_{14}, \quad a_{32} \neq -a_{23} \\ a_{14} a_{23} - a_{41} a_{32} \neq 0.$$

Le cas 4<sup>o</sup>:

$$a_{41} \neq -a_{14}, \quad a_{32} \neq -a_{23} \\ a_{14} a_{23} - a_{41} a_{32} = 0;$$

Le cas 11<sup>o</sup>:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

*Démonstration*: Dans les cas 3<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup> nous choisissons le système des coordonnées suivant:  $o_3 \equiv l_3$ ,  $o_4 \equiv l_4$ , le point  $o_2$  est situé sur  $L_2$  et correspond au plan  $x_3 = 0$ . Le point  $o_1$  est le point d'intersection du plan  $x_3 = 0$  avec la droite  $L_1$ . Le choix du tétraèdre fondamental dans le dernier cas 11<sup>o</sup> du troisième groupe est le suivant:  $o_4 \equiv a$ ,  $o_3 \equiv b$ ; les plans  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  sont les plans  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). Enfin le point  $o_1$  se trouve sur la droite d'intersection des plans  $x_3 = 0$ ,  $\beta$ . Nous déduisons la relation  $a_{21} \neq 0$  en exprimant que la droite  $o_4 o_2$  ne contient que le point  $o_4$ , considéré comme l'élément d'un couple involutif.

Enfin nous allons différencier les cas 3<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup> (l'un et l'autre) à l'aide de la méthode mentionnée dans les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup>.

THÉORÈME 30. — Les corrélations du quatrième groupe sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{22} \neq 0, \quad a_{31} \neq 0.$$

*Démonstration* : Le choix du système fondamental des coordonnées est le suivant :  $o_4 \equiv \nu$  ; le plan  $\alpha$  a l'équation  $x_1 = 0$  ;  $o_3$  est situé sur L, le plan  $x_3 = 0$  correspond à  $o_3$  dans A. Le plan  $x_4 = 0$  contient la seconde tangente (par  $o_3$ ) de la conique K et le point  $o_1$  correspond à  $x_4 = 0$  dans A. Enfin  $o_2$  est le point commun aux plans  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 0$  et au plan qui correspond à  $o_1$  dans  $\bar{A}$ . Le cône  $K_1$  a le sommet  $\nu \equiv o_4$  et il est tangent au plan  $x_1 = 0$  le long de la droite  $\overline{o_4 o_3}$ . On en déduit  $a_{23} = -a_{32}$ ,  $a_{41} = -a_{14}$ . Le cône  $K_1$  n'est pas irréductible. Or,  $a_{22} \neq 0$ ,  $a_{21} \neq 0$ .

THÉORÈME 31. — La matrice de la corrélation polaire (de la polarité) peut être écrite des manières suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Ces formules correspondent aux deux équations bien connues des quadriques irréductibles.

THÉORÈME 32. — La matrice de la corrélation nulle (du système nul) peut être écrite :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le choix du tétraèdre fondamental des coordonnées y est suivant : Un point de l'espace soit  $o_4$  ; le plan qui lui correspond dans A soit  $x_1 = 0$ . Soient  $o_2, o_3$  deux points arbitraires de ce plan. Que les plans correspondants à ces points dans A soient  $x_3 = 0$  respectivement  $x_2 = 0$  et enfin soit  $o_1$  un point de la droite d'intersection des plans  $x_2 = 0, x_3 = 0$ . Or, le tétraèdre fondamental est choisi.