Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONTRIBUTION À LA CLASSIFICATION DES TRANSFORMATIONS CORRÉLATIVES RÉGULIÈRES DANS UN PLAN ET DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS

Kapitel: 2. — La classification des corrélations planes.

Autor: Vyichlo, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28594

C'est-à-dire

$$(\rho - 1) \cdot A \cdot {}^1x = \overline{A} \cdot {}^1x \, .$$

De même

$${}^1x = A^{-1} \cdot {}^2\xi \, , \qquad \rho \cdot {}^1x = (A^{-1} + \overline{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi \, ,$$

ou

$$(\rho - 1) \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = \overline{A}^{-1} \cdot {}^2\xi \, .$$

Théorème 12. — Au point singulier de la quadrique K_1 correspond involutivement le plan qui est singulier pour K_2 et qui passe par ce point.

Démonstration: Soit ${}^1x$ le point singulier de K_1; alors on a

$$(A + \overline{A}) \cdot {}^1x = 0 \qquad \text{ou} \qquad A \cdot {}^1x = - \overline{A} \cdot {}^1x \, .$$

C'est-à-dire le point ${}^1x$ appartient au couple involutif. Soit ${}^2\xi = A \, . \, {}^1x$; ensuite nous avons:

$$(A^{-1} + \overline{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi = (I + \overline{A}^{-1} \cdot A) \cdot {}^1x = \overline{A}^{-1} \cdot (\overline{A} + A) \cdot {}^1x = 0 \, ,$$

c'est-à-dire ${}^2\xi$ est le plan singulier de la quadrique K_2.

Théorème 13. — Le plan d'une paire involutive qui n'est pas le plan singulier de la surface K_2, possède tous les points singuliers de la quadrique K_1. Le point d'un couple involutif qui n'est pas singulier pour la quadrique K_1 est situé dans tous les plans singuliers de la surface K_2.

Démonstration: Elle découle des théorèmes 12 et 10.

2. — La classification des corrélations planes.

Théorème 14. — Les coniques fondamentales de la corrélation plane A se confondent en une seule conique quand et uniquement quand, la corrélation est la polarité.

Preuve: Soit $K_1 \equiv K_2$. Ensuite la droite qui correspond au point ${}^1x$ de la conique K_1 est la tangente de cette courbe en ${}^1x$. L'homographie $\overline{A}^{-1} \, . \, A$ possède chaque point de la conique K_1 pour point double et il en résulte qu'elle est l'identité.

En raison du théorème 8, la corrélation A est la polarité. Dans ce qui suit nous exclurons ce cas et nous supposerons que A ne soit pas la polarité.

Théorème 15. — Quand les coniques fondamentales de la corrélation A sont les coniques irréductibles nous n'allons distinguer que deux cas:

1° La conique K_1 est tangente à K_2 aux deux points a, b; la corrélation A possède trois couples involutifs (a; T_a), (b; T_b), ($T_a \times T_b$; ab), où T_a, T_b sont les tangentes communes en a, respectivement en b.

2° Les coniques K_1 et K_2 ont, au point a, le contact quadriponctuel (d'ordre trois); la corrélation A possède un couple involutif (a; T_a), où T_a est la tangente au point a.

Démonstration: Soit a le point commun des coniques irréductibles K_1, K_2. La droite qui correspond involutivement au point ${}^1a \equiv a$ est la tangente de K_2. Le théorème 10 montre que cette droite est aussi tangente à K_1 en a. Il en résulte que les coniques K_1 et K_2 peuvent posséder en commun soit deux points distincts a, b avec les tangentes T_a, T_b, soit un seul point a avec contact quadriponctuel.

1° Dans le premier cas la droite ab correspond involutivement au point $0 \equiv (T_a \times T_b)$. (Voir fig. 1.) La corrélation A n'a pas les autres couples involutifs. Soit (p; P) un tel couple; d'après le théorème 10 le point p est situé sur la droite ab. Si le point ${}^1r$ est un point des points communs à la droite P et à la conique K_1, il correspond involutivement à la droite $p\,{}^1r \equiv {}^2X$. Ensuite

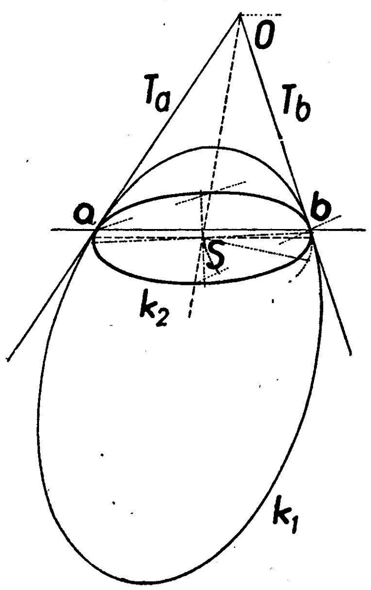

Fig. 1

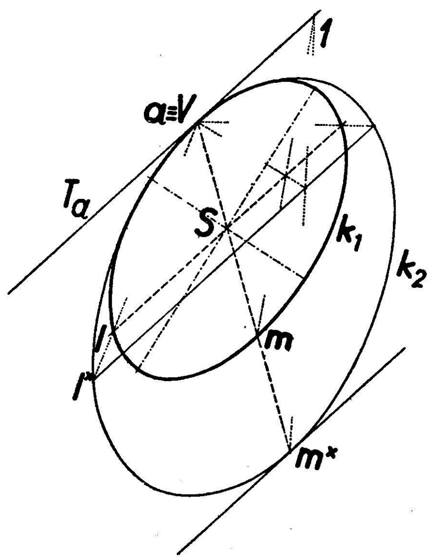

Fig. 2.

l'homographie $\bar{A}^{-1} . A$ a quatre points doubles, à savoir: a, b, $(T_a \times T_b)$, ${}^1r$ qui sont linéairement indépendants, et par suite elle est l'identité, c'est-à-dire que la corrélation A est la polarité. *(Per absurdum.)*

2° Dans le second cas, nous n'avons qu'un seul couple involutif, à savoir $(a; T_a)$. (Voir fig. 2.) Si $(p; P)$ est un autre couple involutif, le point p est situé sur la tangente T_a (d'après le théorème 10). Le point ${}^1y$ qui est un point des points d'intersection de la conique K_1 et de la droite P correspond involutivement à la droite ${}^1yp \equiv {}^2Y$. C'est-à-dire que la conique K_2 passe par le point ${}^1y \not\equiv a$. Mais les coniques K_1, K_2 possèdent en a le contact d'ordre 3 en commun.

THÉORÈME 16. — Quant à la conique K_1 décomposée en deux droites distinctes L, S et quant à la conique K_2 décomposée en deux points l_1, l_2, nous avons seulement un cas.

3° La droite $L_2 \equiv l_1 l_2$ passe par le point $l \equiv (L \times S)$. Ni le point l_1 ni le point l_2 ne peuvent coïncider en l. La corrélation A a deux couples involutifs: $(l; L_2)$, $(s; L_1)$, où s est le point de la droite L_2 pour lequel $(lsl_1 l_2) = -1$ et L_1 est la droite du faisceau (l) déterminé par le birapport harmonique $(LSL_1 L_2) = -1$.

Démonstration: Le théorème 12 montre que $(l; L_2)$ est un couple involutif et que l est situé sur L_2. (Voir fig. 3.) La droite ${}^2S$ du faisceau (l), qui correspond au point ${}^1s \equiv s$ donné sur L par la relation $(lsl_1 l_2) = -1$, forme avec s un couple involutif d'après le théorème 11.

D'après le théorème 10 nous avons ${}^2S \equiv L_1$, où L_1 est la droite du faisceau (l) pour laquelle $(LSL_1 L_2) = -1$. Si un couple $(p; P)$, différent de $(l; L_2)$, est un couple involutif de la corrélation A, nous déduirons, d'après le théorème 13, que p est situé sur L_1, c'est-à-dire $P \equiv L_1$, $p \equiv s$.

THÉORÈME 17. — Si la conique K_1 est dégénérée en droite double L et si la conique K_2 est le point double l, on peut démontrer que:

4° Le point l n'est pas situé sur la droite L. La corrélation A possède le couple $(l; L)$ involutif et le faisceau des couples $(x; X)$

involutifs, où x parcourt la droite L et où X est la droite xl. (Voir fig. 4.)

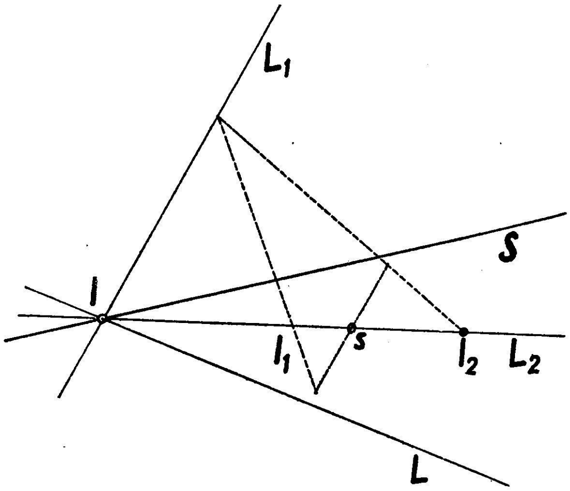

Fig. 3.

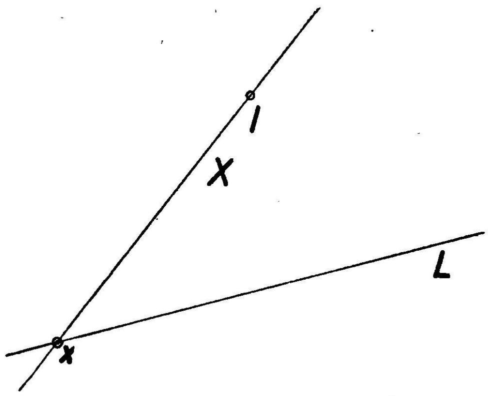

Fig. 4.

La démonstration est simple.

Théorème 18. — Si nous choisissons convenablement le système des coordonnées, nous pouvons écrire pour la corrélation du premier ou du quatrième cas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Quand, et uniquement quand $a_{21} \neq \pm a_{12}$, nous obtenons le premier cas et, quand et uniquement quand $a_{21} = - a_{12}$, nous obtenons le quatrième.

Preuve: Nous choisirons dans le premier cas: $a \equiv o_1$, $b \equiv o_2$, $(T_a \times T_b) \equiv o_3$; dans le quatrième: $l \equiv o_3$; les deux points de la droite L_2, qui sont distincts et différents de l, seront pris pour o_2, respectivement o_3.

Si $a_{21} = a_{12}$, la corrélation est la polarité. (D'après le théorème 7.) Si $a_{21} = - a_{12}$, la conique K_1 est la droite double.

Théorème 19. — La corrélation du cas 3° peut être écrite:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ - a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad a_{11} \neq 0 .$$

Preuve: Soit $s \equiv o_3$, $L_1 \equiv x_3 = 0$, $l \equiv o_2$.

Comme K_1 est la conique décomposée en deux droites L, S qui passent par o_2, on a $a_{21} = - a_{12}$, $a_{11} \neq 0$.

THÉORÈME 20. — La corrélation du cas 2° peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad a_{21} \neq 0 .$$

Démonstration: Soit $a \equiv o_3$, $T_a \equiv x_1 = 0$.

Soit o_2 un point arbitraire sur T_a et soit $x_2 = 0$ la droite qui correspond au point o_2 en A. Enfin soit o_1 le point d'intersection de la conique K_1 avec la droite $x_2 = 0$. (Voir fig. 5.)

Les droites qui correspondent au point $(0 : y_2 : y_3)$ dans les deux espaces pris en considération sont:

$$^2(a_{13} y_3 : a_{22} y_2 : 0) \ , \qquad {}^1\big((a_{21} y_2 + a_{31} y_3) : a_{22} y_2 : 0\big) \ .$$

L'équation $a_{13} y_3 : a_{22} y_2 = (a_{21} y_2 + a_{31} y_3) : a_{22} y_2$ a (d'après le théorème 15) une unique solution, à savoir: $y_2 = 0$; alors nous aurons $a_{31} = a_{13}$; $a_{21} \neq 0$.

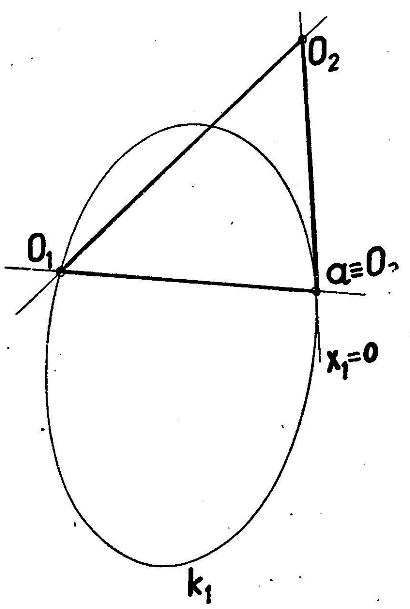

Fig. 5.

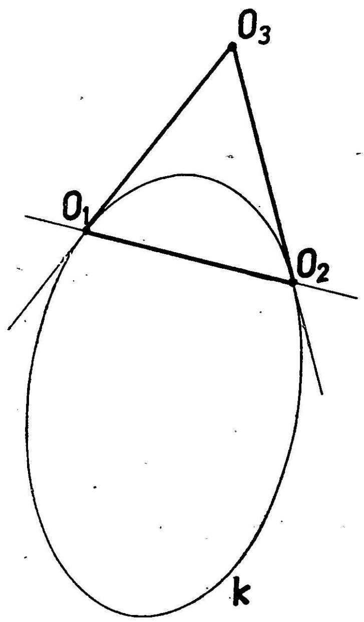

Fig. 6.

THÉORÈME 21. — La polarité plane peut être écrite d'une des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le choix des systèmes des coordonnées est évident. (Voir fig. 6 et 7.)

3. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

THÉORÈME 22. — Chaque corrélation régulière dans l'espace possède un couple involutif des éléments qui coïncident.

Démonstration: Le théorème 9 montre que chaque corrélation A a un couple involutif $({}^1a;\, {}^2\alpha)$. Soit le point ${}^1a$ en dehors du plan ${}^2\alpha$. Les plans ${}^2\xi$, qui correspondent aux points ${}^1x$ du plan ${}^2\alpha$, coupent ${}^2\alpha$ aux droites ${}^2X$. Les éléments des couples $({}^1x;\, {}^2X)$ correspondent l'un à l'autre dans une corrélation plane B non singulière (Dét. $|B| \neq 0$) qui possède un couple $({}^1b;\, {}^2B)$ involutif des éléments coïncidants. Ensuite le plan déterminé par le point ${}^1a$ et par la droite ${}^2B$ correspond involutivement au point ${}^1b$ dans A.

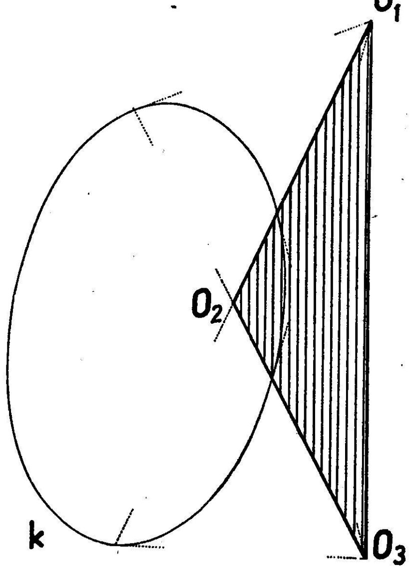

Fig. 7.

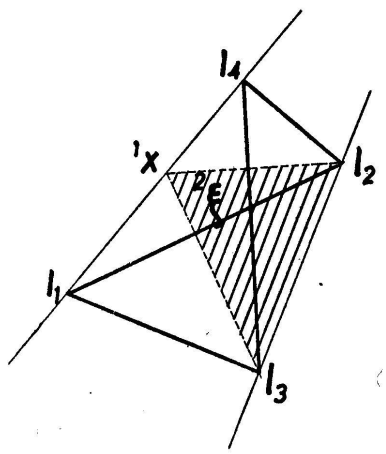

Fig. 8.