Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

Kapitel: L'isochrone paracentrique.

Autor: Turrière, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515775

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que, pour ne pas trop allonger l'exposé précédent, nous avons supprimé les énoncés des postulats qui, quoique indispensables au développement des démonstrations complètes des théorèmes de la théorie, se présentent si naturellement à l'esprit qu'en supprimant ces énoncés nous ne croyons pas avoir nui à la clarté de l'exposition. J'ajoute que j'ai appliqué les idées esquissées dans le présent article avec tous les détails nécessaires dans le *Traité de Mécanique rationnelle* que je publie actuellement en langue polonaise.

SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

PAR

E. Turrière (Montpellier).

Les équations du type

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y^3 + 3 a_1 y^2 + 3 a_2 y + a_3 = 0$$

ont été étudiées par R. Liouville et par P. Appell [1]. La présente note concerne diverses courbes dont la détermination dépend d'équations de cette forme.

L'isochrone paracentrique.

1\. — En premier lieu, considérons l'isochrone paracentrique [2] qui, historiquement, est la première courbe définie par une équation différentielle dont l'intégration, impossible dans le cas général, tint en échec les fondateurs de l'analyse.

---

[1] P. Appell, Sur les invariants de quelques équations différentielles. *Journal de mathématiques pures et appliquées* [4], t. V, 1889, p. 361-423.

[2] Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes ou gauches*, t. II, p. 50-55.

Quelques années plus tard, années dont le nombre comptait pour les progrès de la géométrie infinitésimale, la courbe de pression constante donnait elle aussi lieu à des difficultés. La question posée en 1695, reposée en 1696 par Jean BERNOULLI dans deux lettres à LEIBNIZ n'était résolue qu'en 1700 par le marquis DE L'HÔPITAL dans un mémoire, plus important que la question à laquelle il était consacré et dans lequel étaient énoncés des principes relatifs au mouvement gêné du point pesant. Ici la difficulté tenait uniquement à l'insuffisance de méthode en dynamique et non à l'imperfection de l'analyse [1].

Au contraire, dans le cas du problème de l'isochrone paracentrique proposé par LEIBNIZ en 1689, considéré par Huygens (1694), résolu partiellement en 1694 par Jacques et par Jean BERNOULLI, la difficulté était purement analytique. Jacques BERNOULLI, entre temps, en 1690, montrait que l'isochrone ordinaire était identique à la parabole semi-cubique, complétant ainsi la solution de 1689 de Huygens d'une question posée en 1687 par LEIBNIZ.

L'équation différentielle de l'isochrone paracentrique (en coordonnées polaires)

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = \frac{\sin\theta}{r} + \frac{a}{r^2}\,, \qquad a = \text{constante}\,.$$

$$\mathrm{tg}^2 V = y + a\,,$$

ne peut, en effet, être intégrée que dans le cas $a = 0$

$$2\sqrt{r} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\,,$$

la courbe dépend alors des fonctions elliptiques du cas harmonique et c'est précisément à l'étude de la représentation de l'isochrone paracentrique qu'est due la découverte de la lemniscate de Jacques BERNOULLI.

---

1 Voir mon étude « La courbe de L'Hôpital », dans *L'Enseignement mathématique*, t. XXXVI, 1937, p. 179-194.

2. — Considérons d'une manière générale l'équation de condition

$$y = f(\operatorname{tang} V)$$

imposée à une courbe plane inconnue, ou encore

$$y = r \sin \theta = f(\varphi)$$

en posant

$$\operatorname{tg} V = \varphi .$$

Il en résulte, par dérivation,

$$\frac{dr}{r} + \operatorname{cotg} \theta \, d\theta = \frac{f'}{f} d\varphi \ ;$$

$$d\theta \left[\frac{1}{\varphi} + \operatorname{cotg} \theta\right] = \frac{f'}{f} d\varphi \ .$$

Effectuons le changement d'inconnue

$$\operatorname{cotg} \theta + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{fz} \ ;$$

l'équation devient

$$\frac{dz}{d\varphi} = ff' \cdot \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2} \cdot z^2 (z + P) \ ,$$

avec

$$P = \frac{f - 2\varphi f'}{ff'(\varphi^2 + 1)} \ .$$

Le changement de variable défini par

$$\varpi = \int \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2} f \, df$$

donne à l'équation sa forme canonique:

$$\frac{dz}{d\varpi} = z^2 (z + P) \ .$$

Pour l'isochrone paracentrique

$$y = \operatorname{tang}^2 V - a \ ,$$

$$f = \varphi^2 - a$$

$$P = \frac{-(\varphi^2 + a)}{2\varphi(\varphi^2 + 1)(\varphi^2 - a)} \ .$$

3. — L'équation est intégrable pour P = constante. Le cas P = 0 donne:

$$\frac{dz}{z^3} = f \cdot \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2} df ,$$

$$2\varphi f' = f .$$

En prenant

$$f = \sqrt{\varphi} , \; y^2 = tang\, \mathrm{V},$$

la courbe a pour équation polaire

$$r^2 = 2(a - \operatorname{cotg} \theta) ;$$

a est une constante.

Lorsque P est constante, f est déterminé par une équation de Riccati en φ:

$$\frac{d\varphi}{df} = \frac{2\varphi}{f} - k(\varphi^2 + 1) .$$

En posant

$$\varphi = \mathrm{F} \cdot f^2 ,$$

la nouvelle fonction inconnue F est intégrale de l'équation de Riccati

$$\frac{d\mathrm{F}}{df} + k\left(f^2 \mathrm{F}^2 + \frac{1}{f^2}\right) = 0 .$$

k est la valeur constante de P. En posant

$$u = \frac{1}{f} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{X} , \qquad \varphi = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^2} , \qquad \mathrm{F} = \mathrm{P}^2\, \mathrm{Y}$$

la forme canonique de l'équation de Riccati est:

$$\boxed{\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = 1 + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^4} .}$$

Un nouveau changement de variables

$$\mathrm{X} = \frac{1}{3}\xi^{-\frac{1}{3}} , \qquad \mathrm{Y} = \frac{1}{9}\eta ,$$

lui donne la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 + \xi^{-\frac{4}{3}} = 0 .$$

Elle est réduite au type classique

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = k\xi^m$$

$$m = -\frac{4N}{2N+1}$$

N étant entier (N = 1). Le changement de variable

$$\xi = At^{\frac{2}{m+2}}, \qquad A^{m+2} = -\frac{(m+2)^2}{4k},$$

$$\eta = \frac{1}{u}\frac{du}{d\xi},$$

la transforme en l'équation de Bessel:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2n+1}{t}\frac{du}{dt} + u = 0 ;$$

on est dans le cas d'intégration des fonctions de Bessel d'indice $n = -\frac{3}{2}$,

$$k = -1 , \qquad A = \frac{1}{27} .$$

4. — A signaler aussi, un cas d'intégration

$$y^m = \operatorname{tg} V , \qquad m = \text{const.}$$

par séparation des variables:

$$r^{m-1}\, dr = \sin^{-m}\theta \cdot d\theta .$$

Courbes définies par une relation entre OT et OM.

5. — Soit T la trace sur l'axe Ox de la tangente en M à une courbe. La condition

$$\lambda = OT = f(r) ,$$

entre la coordonnée axiale $\lambda = x - y\frac{dx}{dy}$ et le rayon vecteur $r = OM$, devient

$$r^2\frac{d\theta}{dy} = f(r) ,$$

$$\frac{dx}{x-f} = \frac{dr}{r - \frac{x}{r}f} .$$