SUR L'EMPLOI DU VECTORIEL DANS LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE DE DARBOUX

Autor(en): **Becqué, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515777

SUR L'EMPLOI DU VECTORIEL DANS LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE DE DARBOUX

PAR

J. BECQUÉ (Clermont-l'Hérault).

Homographies vectorielles, trièdre orthonormal ou trièdre tangent à une surface sont des éléments employés dans l'*Analisi Vettoriale Generale* de MM. BURALI FORTI, MARCOLONGO, BURGATTI et BOGGIO.

Le Calcul vectoriel employé avec un trièdre orthonormal ou avec un trièdre tangent à une surface, est appliqué à la théorie des courbes et des surfaces dans de nombreux ouvrages, particulièrement dans la *Differential Geometry* de M. WEATHERBURN.

Diverses questions de théorie des surfaces, avec la méthode et les notations du Calcul tensoriel, forment la troisième partie de l'ouvrage de M. McCONNEL: *Applications of the Absolute Differential Calculus.*

Si je crois que l'emploi des homographies vectorielles (qui gardent leur nature géométrique aux éléments en jeu) doive être combiné avec les notations algébriques du tensoriel (à cause des indices muets), et que leur utilisation donne le maximum de résultats lorsqu'on utilise un repère associé à son réciproque (leur emploi simultané paraissant être dans la nature même des choses) ainsi qu'en témoignent, par exemple, les travaux de M. P. DELENS, il me semble que l'emploi du vectoriel, celui des notations tensorielles et des symboles de Christoffel, et leur utilisation avec un seul trièdre, arbitraire, mais orthonormal (donc coïncidant avec son réciproque) faciliteraient l'étude de diverses questions classiques de théorie des surfaces dans l'espace euclidien, tout en donnant des résultats à la fois condensés et aisément développables.

Je prendrai comme exemple quelques questions traitées par DARBOUX dans sa *Théorie des Surfaces.* Au symbole de Kronecker, désigné ici par (ab), j'ajouterai le symbole (abc) valeur $+1, -1$, ou 0 suivant que la permutation des trois nombres est paire, impaire, ou avec deux nombres égaux.

I. — MOUVEMENT À TROIS PARAMÈTRES.

Considérons deux trièdres orthonormaux, l'un $\mathrm{I}(\mathrm{I}_m)$ fixe, d'origine O, l'autre $i(i_m)$ lié au corps, d'origine M; ces deux trièdres sont rattachés l'un à l'autre par les cosinus directeurs des angles des axes:

$$c_l^m = \mathrm{I}^m \times i_l\,,$$

a. — Soit un vecteur a de composantes a^m sur le trièdre i, posons $a/_{\mathrm{R}} = i_m \dfrac{\partial a^m}{\partial u^{\mathrm{R}}}$, désignons par p_{R} la rotation instantanée de i quand u^{R} varie seul, la condition $i_m \times i_m = 1$, nous donne quand u^{R} varie seul $i_m \times \dfrac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = 0$, c'est donc que p_{R} est tel que $\dfrac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = p_{\mathrm{R}} \wedge i_m$, p_{R} a pour composantes $p_{\mathrm{R}}^m = p_{\mathrm{R}} \times i^m$, ces notations permettent de séparer le mouvement en un mouvement relatif et en un mouvement d'entraînement

$$\frac{\partial a}{\partial u^{\mathrm{R}}} = \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{R}}} a^m i_m = i_m \frac{\partial a^m}{\partial u^{\mathrm{R}}} + a^m \frac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = a_{/\mathrm{R}} + p_{\mathrm{R}} \wedge a\,. \tag{1}$$

Passons au repère (I_m) mais, pour abréger l'écriture, écrivons I pour I_m jusqu'à l'équation (A_1), I étant fixe, les $\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial u^{\mathrm{R}}}$ sont nuls, donc:

$$\mathrm{I}_{/\mathrm{R}} = \mathrm{I} \wedge p_{\mathrm{R}}\,, \tag{2}$$

leurs dérivées partielles sont $\dfrac{\partial}{\partial u^{\mathrm{S}}}\,\mathrm{I}_{/\mathrm{R}} = \dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial u^{\mathrm{S}}} \wedge p_{\mathrm{R}} + \mathrm{I} \wedge \dfrac{\partial p_{\mathrm{R}}}{\partial u^{\mathrm{S}}}$, pour évaluer les $\dfrac{\partial}{\partial u^{\mathrm{S}}}$ tenons compte de (1) qui s'applique aux vecteurs I et p_R, le premier membre est, d'après (2): $(I_{/R})_{/S} + p_S \wedge I_{/R} = I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R)$, le second membre est $I \wedge (p_{R/S} + p_S \wedge p_R)$, on a donc $I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R) = I \wedge p_{R/S} + I \wedge (p_S \wedge p_R)$, de même $I_{/S/R} + p_R \wedge (I \wedge p_S) = I \wedge p_{S/R} + I \wedge (p_R \wedge p_S)$, or: 1° $I_{/R/S} = I_{/S/R}$, car les /R/S supposent des vitesses relatives, donc des i_m constants; 2° entre les trois vecteurs I, p_R, p_S on a l'identité $I \wedge (p_R \wedge p_S) + p_R \wedge (p_S \wedge I) + p_S \wedge (I \wedge p_R) = 0$, donc $p_S \wedge (I \wedge p_R) - p_R \wedge (I \wedge p_S) = - I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par soustraction des deux formules on obtient: $- I \wedge (p_R \wedge p_S) = I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R}) + I \wedge (p_S \wedge p_R) - I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par suite: $I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R} + p_S \wedge p_R) = 0$, d'où les équations pour trois paramètres généralisant les équations de Darboux (L. I, ch. V, éq. 5) pour deux paramètres (cf. *Systèmes orthogonaux*, L. II, ch. II):

$$(A_1)\ p_{R/S} - p_{S/R} = p_R \wedge p_S \ ;$$

b. — Pour déterminer le mouvement d'un point, introduisons les deux trios de vecteurs: vitesses M_R de l'origine M et rotations p_R du trièdre mobile pour u^R variant seul (R = 1, 2, 3). Appliquons (1) aux vitesses $\frac{\partial M_R}{\partial u^S} = M_{R/S} + p_S \wedge M_R$, mais puisque $M_R = \frac{\partial M}{\partial u^R}$, on a $\partial^2 M/\partial u^R \partial u^S = \partial M_R/\partial u^S = \partial M_S/\partial u^R$, donc:

$$(A_2)\ M_{R/S} - M_{S/R} = p_R \wedge M_S - p_S \wedge M_R \ ;$$

c. — Introduisons p_R^m et M_R^m composantes sur i_m de p_R et M_R, ayant:

$$M_{R/S} = (M_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial M_R^0/\partial u^S \ , \qquad p_{R/S} = (p_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial p_R^0/\partial u^S \ ,$$

$$p_R \wedge p_S = p_R^m i_m \wedge p_S^n i_n = p_R^m p_S^n i_0 (mno) \ ,$$

$$p_R \wedge M_S = p_R^m i_m \wedge M_S^n i_n = p_R^m M_S^n i_0 (mno) \ ;$$

les (A) donnent en égalant les coefficients de i_0:

$$(A_1)\ \frac{\partial p_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial p_S^0}{\partial u^R} = p_R^m p_S^n (mno) \ ,$$

$$(A_2)\ \frac{\partial M_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial M_S^0}{\partial u^R} = (p_R^m M_S^n - p_S^m M_R^n)(mno) \ ;$$

d. — Un déplacement d appliqué aux paramètres produit un déplacement dM de l'origine et di_a des axes, ayant pour expression (posant $\mathrm{M}^m = \mathrm{M}_r^m du^r = i_m \times d\mathrm{M}$, $p = p_r du^r$):

$$d\mathrm{M} = \mathrm{M}_r du^r = (\mathrm{M}_r \times i_m) i_m du^r = \mathrm{M}_r^m i_m du^r = \mathrm{M}^m i_m ,$$

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial u^r} du^r = p_r \wedge i_a du^r = p_r du^r \wedge i_a = p \wedge i_a ;$$

en désignant par p^m les composantes de p sur (i_m) : $p^m = = p \times i_m = p_r du^r \times i_m = p_r^m du^r$, on peut écrire:

$$di_a = p^c i_c \wedge i_a = (abc) i_b p^c ,$$

si l'on pose $di_a = \omega_{an} i_n$ (par exemple pp. 177 et suivantes de: *Théorie des groupes finis et continus...* de M. E. Cartan), le lien avec la notation ci-dessus s'obtient en observant que:

$$\omega_{an} = di_a \times i_n = p \wedge i_a \times i_n = p \times i_a \wedge i_n = p \times (anr) i_r = p^r (anr) ,$$

on en déduit que $\omega_{\mathrm{AA}} = 0$, $\omega_{an} = -\omega_{na}$, car $(anr) = -(nar)$, et que

$$p^a = \frac{1}{2} (amn) \omega_{mn} ;$$

e. — Introduisons maintenant un trièdre auxiliaire qui va servir à la représentation sphérique, son origine sera fixe. Pour un point N lié au trièdre, tel que $\mathrm{N} = \mathrm{M} + n$, on aura $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u^{\mathrm{R}}} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u^{\mathrm{R}}} + n_{/\mathrm{R}} + p_{\mathrm{R}} \wedge n$, qui se réduit à $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u^{\mathrm{R}}} = p_{\mathrm{R}} \wedge n$, et posons toujours $d\mathrm{N} = du^r \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u^r}$, on a:

$$d\mathrm{N} = p \wedge n ,$$

par suite $d\mathrm{N}^2 = (p \wedge n)^2 = p^2 n^2 - (p \times n)^2$, et si n est la normale unitaire à la surface ($n = i_3$), $n^2 = 1$, $p \times n = p^3 = = p_r^3 du^r$, $(p \times n)^2 = p_r^3 p_s^3 du^r du^s$, $p^2 = p^m p^m = p_r^m p_s^m du^r du^s$, donc en désignant par une lettre grecque un indice qui ne prend pas la valeur 3,

$$d\sigma^2 = d\mathrm{N}^2 = (p \wedge n)^2 = p_r^\varepsilon p_s^\varepsilon du^r du^s ,$$

f. — Pour un point N lié au trièdre mobile (i_m) on aura, puisque $p \wedge n = p^b i_b \wedge n^c i_c = i^a (abc) p^b n^c$,

$$dN = dM + p \wedge n = i_a (M^a + (abc) p^b n^c) \,, \qquad (f)$$

g. — Si N était mobile par rapport à (i_m) on aurait (DARBOUX, L. I, ch. VII, éq. 4):

$$dN = i_a (dn^a + M^a + (abc) p^b n^c) \,.$$

II. — APPLICATIONS À QUELQUES QUESTIONS GÉNÉRALES.

a. — *Tangentes conjuguées.* — « Si le point M de la surface décrit une courbe on obtiendra la conjuguée de la tangente à cette courbe en prenant l'intersection du plan tangent en M avec le plan tangent infiniment voisin » (DARBOUX, L. V, ch. I), cette droite est l'axe des normales N — M en M, et N + dN — (M + dM) au point infiniment voisin de M, elle a donc pour vecteur, d'après (f):

$$j = (N - M) \wedge (N - M + dN - dM) =$$
$$= n \wedge (n + p \wedge n) = p (n \times n) - n (p \times n) = p - np^3 = p^\varepsilon i_\varepsilon \,,$$

et un déplacement δM suivant la direction conjuguée de dM devra satisfaire à l'équation (puisque δM devra être suivant j):

$$\delta = j \wedge \delta M = (n \wedge dN) \wedge \delta M = p^\mu i_\mu \wedge M_r^\nu \delta u^r i_\nu =$$
$$= p^\mu M_r^\nu (\mu\nu 3) i_3 \delta u^r = (3 \mu\nu) n p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta \,,$$

c'est-à-dire:

$$(3 \mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta = 0 \,.$$

Si les deux directions conjuguées coïncident, on obtient l'équation des asymptotiques:

$$j \wedge dM = 0 \qquad \text{ou} \qquad (3 \mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha du^\beta = 0 \,,$$

ou encore, ayant $j = n \wedge (p \wedge n)$ et $dN = p \wedge n$, on a $dN \times j = 0$ et, ici, j portant dM:

$$dM \times dN = 0 \,.$$

b. — *Lignes de courbure.* — 1° Cherchons les déplacements d du trièdre mobile pour lesquels la normale à la surface engendrera une surface développable, il faut qu'il existe sur n un point $P = M + \rho n$ décrivant, dans le mouvement considéré, une courbe constamment tangente à cette normale, $dP = dM + \rho dn + nd\rho$ sera porté par n si $n \wedge dP = 0$, donc si $n \wedge (dM + \rho dn) = 0$, ainsi pour un déplacement suivant une ligne de courbure on aura:

$$dM + \rho dn = 0 \; , \qquad (\rho)$$

or $n = N - M$, $dn = dN - dM = dM + \rho \wedge n - dM = \rho \wedge n$, posons $k = \frac{1}{\rho}$, l'équation devient (équation de Rodrigues)

$$dn + kdM = 0 \; , \qquad \text{ou} \qquad (kM_\alpha + p_\alpha \wedge n)\, du^\alpha = 0 \; , \qquad (\mathrm{R})$$

de la forme $x_\alpha du^\alpha = 0$, pour que cette équation homogène en du^α ait une solution, il faut que l'on ait : $x_1 \wedge x_2 = 0$, posons $H = |M_1 \wedge M_2|$, rappelant que $M_1 \wedge M_2 = Hn$, $M_\alpha \times n = 0$, et $(p_1 \wedge n) \wedge (p_2 \wedge n) = n(n \times p_1 \wedge p_2)$, n apparaît alors en facteur dans tous les termes, il faut donc que son coefficient soit nul, ce qui donne l'équation aux courbures principales:

$$Hk^2 + (p_1 \times M_2 - p_2 \times M_1)k + n \times p_1 \wedge p_2 = 0 \; ,$$

on a ainsi les expressions suivantes de la courbure totale K et de la courbure moyenne J:

$$K = \frac{p_1 \wedge p_2 \times n}{M_1 \wedge M_2 \times n} = \frac{p_1 \wedge p_2 \times n}{H} \; , \qquad J = \frac{M_1 \times p_2 - M_2 \times p_1}{H} \; .$$

Remarquons que l'on peut donner à K une autre forme, ayant $p_1 \wedge p_2 \times M_1 \wedge M_2 = p_1 \wedge p_2 \times Hn = Hp_1 \wedge p_2 \times n = H^2 K$ on peut écrire $K = p_1 \wedge p_2 \times M_1 \wedge M_2/H^2$.

La condition (ρ) $dM + \rho\, p \wedge n = 0$ exprime que dM est parallèle à $p \wedge n$, donc (ce qui revient à éliminer ρ) $dM \wedge (p \wedge n) = - p \times dM = 0$ (car $n \times dM = 0$), l'équation des lignes de courbure est donc:

$$p \times dM = 0 \qquad (\gamma)$$

(la tangente est orthogonale à la rotation du trièdre).

2° On retrouve cette équation en cherchant si l'un des mouvements infiniment petits du trièdre peut se réduire à une rotation, exprimons qu'il existe une ligne de points P, liés au trièdre, de déplacement nul : $dP = dM + p \wedge MP = 0$, d'où:

$$MP = \lambda p + p \wedge dM / p^2 . \qquad (\Delta)$$

On voit que pour un tel déplacement $p \times dM = 0$ (γ), « les déplacements qui se réduisent à des rotations correspondent à des déplacements de l'origine M suivant les lignes de courbure (γ) à la surface » (Darboux, § 489). Il en résulte aussi que dans ce déplacement p est dans le plan normal en M à la ligne de courbure (γ), la normale n sera donc coupée par MP en un point $C = \rho n + M$, tel que $\rho n = \lambda p + p \wedge dM / p^2$, en $\wedge p$ il vient $\rho n \wedge p = \frac{p \wedge dM}{p^2} \wedge p = dM$, ce qui est ($\rho$) « Les axes qui correspondent à ces rotations passent par le centre de courbure correspondant » (d°), en $\times p$, on a $\rho n \times p = \lambda p^2$, en $\times n$, on a

$$\rho = \lambda p \times n + n \times p \wedge dM / p^2 = \rho \frac{(p \times n)^2}{p^2} + n \times p \wedge dM / p^2$$

d'où pour C

$$\rho = \frac{n \times p \wedge dM}{p^2 - (p \times n)^2} .$$

3° Les directions principales étant orthogonales, si t^ε sont leurs unitaires (dans ce qui suit ε n'est pas un indice muet à sommer), les formules de Rodrigues $d_\varepsilon n + k_\varepsilon d_\varepsilon M = 0$, donnent $t^\varepsilon (d_\varepsilon \sigma + k_\varepsilon d_\varepsilon s) = 0$, de plus, on pourra écrire $dn = dn \times t^r \cdot t^r$, posons $\varphi = t^1, t$ on a:

$$t = t^1 \cos\varphi + t^2 \sin\varphi , \qquad (1)$$

enfin, comme n est orthogonal à tout déplacement de M dans le plan tangent: $n \times dM = 0$, $n \times d_\varepsilon M = 0$, donc $d_\varepsilon n \times dM + n \times d_\varepsilon dM = 0$, et $dn \times d_\varepsilon M + n \times dd_\varepsilon M = 0$, aussi, ayant $dd_\varepsilon M = d_\varepsilon dM$, $dn \times d_\varepsilon M = d_\varepsilon n \times dM$, ou

$$dn \times t^\varepsilon d_\varepsilon s = t^\varepsilon d_\varepsilon \sigma \times t\, ds = t^\varepsilon \times t\, ds (- k_\varepsilon d_\varepsilon s)$$

et

$$dn \times t^\varepsilon = - k_\varepsilon ds\, t^\varepsilon \times t , \qquad (2)$$

d'où ($\varkappa$ courbure, τ torsion) avec les notations usuelles

$$k = \varkappa \cos \theta = \frac{n \times d^2 \mathrm{M}}{ds^2} = -\frac{dn \times t^r \cdot t^r \times d\mathrm{M}}{ds^2} =$$

$$= \frac{k_1\, ds \cos \varphi \cdot ds \cos \varphi + k_2\, ds \sin \varphi \cdot ds \sin \varphi}{ds^2}\,, \qquad (\alpha)$$

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi\,, \qquad \text{(E . Euler)}$$

$$\mathcal{T} = \tau - \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\mathrm{M} \times dn \wedge n}{ds} = \frac{dn \times n \wedge t\, ds}{ds^2} \qquad (\beta)$$

qui vaut d'après (1) et (2)

$$dn \times \frac{\cos \varphi\, t^2 - \sin \varphi\, t^1}{ds} = \cos \varphi\,(-\,k_2 \sin \varphi) - \sin \varphi\,(-\,k_1 \cos \varphi)\,,$$

$$\mathcal{T} = (k_1 - k_2) \sin \varphi \cos \varphi\,, \qquad \text{(B . Bonnet)}$$

(γ) (E) peut s'écrire:

$$k_1 - k = (k_1 - k_2) \sin^2 \varphi\,, \qquad k - k_2 = (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi\,,$$

(B) peut s'écrire en portant ses deux membres au carré et tenant compte de ce qui précède:

$$\mathcal{T}^2 = (k_1 - k)\,(k - k_2)\,,$$

d'où, pour les lignes de courbure,

$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{d'après (B)} \quad \mathcal{T} = 0\,, \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{d\theta}{ds}\,, \quad \text{(Lancret)}\,;$$

pour les géodésiques

$$\theta = 0\,, \quad k = \varkappa \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^2 = \tau^2 = (k_1 - \varkappa)\,(\varkappa - k_2)\,, \qquad \text{(Kommerer)}\,;$$

pour les asymptotiques

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \mathcal{T} = \tau = \pm \sqrt{-\,k_1 k_2}\,, \qquad \text{(Enneper)}\,.$$

c. — *Représentation sphérique.* — Considérons les quatre trièdres: 1° le trièdre (i_m) de rotation p et d'origine M; 2° le trièdre parallèle (i^0_m) de même rotation p et d'origine O fixe; 3° le trièdre formé par n, normale à la surface (qui est i_3), par t, unitaire de la tangente dM à la courbe (C) dont un arc ds est décrit par M dans le déplacement d, et par le vecteur $n \wedge t$ (ce trièdre est dit de Ribaucour et sa rotation sera r); 4° le trièdre de Serret-Frenet associé à la courbe C, t, $\hat{n}$, b. L'angle i_1, t sera désigné par ψ, l'angle $\hat{n}$, n par θ, l'angle entre i_1 et $p \wedge n = dn$ par χ.

1. — L'extrémité du vecteur $n = \overset{\cdot 0}{i}_3$ a un déplacement $dn = p \wedge n$, soit, comme au (I, e), $d\sigma$ sa longueur, puis t^0 le vecteur égal à t issu de 0, l'angle $\overset{\cdot 0}{i}_1$, t^0 vaut aussi ψ, par suite:

$$t_0 = t = \frac{d\mathrm{M}}{ds} = \overset{\cdot 0}{i}_1 \cos\psi + \overset{\cdot 0}{i}_2 \sin\psi = \mathrm{M}^\varepsilon \overset{\cdot 0}{i}_\varepsilon / ds \ ,$$

$$p \wedge n = p^r \overset{\cdot 0}{i}_r \wedge n = p^2 \overset{\cdot 0}{i}_1 - p^1 \overset{\cdot 0}{i}_2 \ , \qquad dn = d\sigma(\cos\chi\, \overset{\cdot 0}{i}_1 + \sin\chi\, \overset{\cdot 0}{i}_2) \ ,$$

$$dn \times d\mathrm{M} = d\sigma\, ds \cos(\psi - \chi) = p \wedge n \times t\, ds = (p^2 \cos\psi - p^1 \sin\psi)\, ds \ ,$$

$$dn \wedge d\mathrm{M} = d\sigma\, ds \sin(\psi - \chi)\, n = (p \wedge n) \wedge t\, ds =$$
$$= n\, t \times p\, ds = (p^1 \cos\psi + p^2 \sin\psi)\, ds \cdot n \ ,$$

qui contiennent les formules de Darboux (L. V, ch. I, éq. 5): $d\sigma \cos(\psi - \chi) = p^2 \cos\psi - p^1 \sin\psi, \ldots$

2. — Soit $\varkappa$ la courbure en M de la courbe (C), on a $dt = \varkappa\, ds\hat{n}$, comme l'extrémité du vecteur subit un déplacement (d'après I a) $dt^0 = dt = t^0_{/r}\, du^r + p \wedge t$, et que l'on a:

$$t^0_{/r}\, du^r = -\sin\psi\, d\psi\, \overset{\cdot 0}{i}_1 + \cos\psi\, d\psi\, \overset{\cdot 0}{i}_2 = n \wedge t\, d\psi \ ,$$

$$p \wedge t = (p^1 \sin\psi - p^2 \cos\psi)\, n + p^2 \cos\psi\, \overset{\cdot 0}{i}_2 - p^1 \sin\psi\, \overset{\cdot 0}{i}_1 \ ,$$

il vient

$$\varkappa\, ds\, \hat{n} = (d\psi\, n + p) \wedge t \ .$$

En multipliant par n (scalairement, vectoriellement), ayant

$$\hat{n} \wedge n = t \sin\theta \ ,$$

$$\varkappa \cos\theta\, ds = n \wedge p \times t = p^1 \sin\psi - p^2 \cos\psi \ ,$$

$$t\varkappa \sin\theta\, ds = (d\psi + p \times n)\, t \ , \qquad \text{ou} \qquad \varkappa \sin\theta\, ds = d\psi + p^3 \ ;$$

on en déduit $\varkappa \cos\theta = -\cos(\psi - \chi)\, d\sigma/ds$, on en déduit aussi, ayant $n \wedge p \times t = -dn \times d\mathrm{M}/ds$, que $\varkappa \cos\theta = -t \times dn/ds$

sera un invariant pour toutes les courbes ayant même tangente t, ensuite que: $\varkappa \cos\theta = \frac{n \times d^2\mathrm{M}}{ds^2}$ (puisque $n \times d\mathrm{M} = 0$, $dn \times d\mathrm{M} = -n \times d^2\mathrm{M}$). On peut en déduire rapidement une forme de l'équation des géodésiques, car b étant l'axe du plan osculateur à (C) en M, pour que le plan osculateur soit en chaque point normal à la surface, b doit être normal à n, on a donc pour équation

$$0 = n \times b = n \times t \wedge \hat{n} = t \times \hat{n} \wedge n = t \times t \sin\theta = \sin\theta\ ,$$

ou

$$d\psi + p^3 = 0\ .$$

3. — Soit τ la torsion de la courbe (C) en M, on a $db = \tau\, ds\hat{n}$, l'extrémité du vecteur $b^0 = b = t \wedge n \cos\theta + n \sin\theta$, subit un déplacement $db^0 = b^0_{/r} du^r + p \wedge b$, mais

$$b^0_{/r} du^r = -\sin\theta\, d\theta\, t \wedge n + \cos\theta (i^0_2 \sin\psi + i^0_1 \cos\psi)\, d\psi + n \cos\theta\, d\theta =$$
$$= n \wedge t \sin\theta\, d\theta + t \cos\theta\, d\psi + n \cos\theta\, d\theta\ ,$$

$$p \wedge b = p \wedge (t \wedge n) \cos\theta + p \wedge n \sin\theta =$$
$$= tp \times n \cos\theta - np \times t \cos\theta + p \wedge n \sin\theta\ ,$$

mais

$$p \wedge n = p \wedge n \times t \cdot t - p \times t \cdot n \wedge t\ ,$$

donc:

$$\tau\, ds (n \cos\theta + n \wedge t \sin\theta) =$$
$$= (d\theta - p \times t)(n \cos\theta + n \wedge t \sin\theta) + t\left[(d\psi + p^3) \cos\theta + p \wedge n \times t \sin\theta\right]\ ,$$

on en déduit la valeur de la torsion géodésique:

$$\mathfrak{T}\, ds = \tau\, ds - d\theta = -p \times t = -p^1 \cos\psi - p^2 \sin\psi = -n \times dn \wedge t\ .$$

(de $\mathfrak{T} ds = -p \times t$, nous déduisons d'abord le théorème de Bonnet: $\mathfrak{T} ds$ est le même pour toutes les courbes ayant même tangente et ensuite que $\mathfrak{T} ds$ est nul le long d'une ligne de courbure). Quant au terme en t il est identiquement nul car

$$(d\psi + p^3) \cos\theta = \varkappa\, ds \sin\theta \cdot \cos\theta\ ,$$

et

$$p \wedge n \times t \sin\theta = -n \wedge p \times t \sin\theta = -\varkappa \cos\theta\, ds \cdot \sin\theta\ .$$

On a aussi d'après le 1° $\tau ds - d\theta = - d\sigma \sin(\psi - \chi)$ qui, combinée à la valeur de $\varkappa \cos\theta$ donne

$$(\varkappa \cos\theta)^2 + \left(\tau - \frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ;$$

4. — Sur le repère de Ribaucour la rotation du trièdre (i_m) a pour valeur:

$$\begin{aligned} p &= p \times n \cdot n + p \times t \cdot t + p \times n \wedge t \cdot n \wedge t = \\ &= (\varkappa \sin\theta\, ds - d\psi)\, n + (d\theta - \tau\, ds)\, t - \varkappa \cos\theta\, ds\, n \wedge t , \end{aligned}$$

elle s'exprimera donc sur son repère par:

$$\begin{aligned} p = (\varkappa \sin\theta\, ds - d\psi)\, n &+ (d\theta - \tau\, ds)\,(i_1 \cos\psi + i_2 \sin\psi) \\ &- \varkappa \cos\theta\, ds\,(- i_1 \sin\psi + i_2 \cos\psi) , \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} p &= i_1(\varkappa \cos\theta\, ds \sin\psi + (d\theta - \tau\, ds) \cos\psi) + \\ &+ i_2(- \varkappa \cos\theta\, ds \cos\psi + (d\theta - \tau\, ds) \sin\psi) + i_3(\varkappa \sin\theta\, ds - d\psi) , \end{aligned}$$

avec les notations habituelles on aura:

$$\frac{p}{ds} = (\varkappa_N \sin\psi - \mathfrak{T} \cos\psi)\, i_1 - (\varkappa_N \cos\psi + \mathfrak{T} \sin\psi)\, i_2 + \left(\varkappa_G - \frac{d\psi}{ds}\right) i_3 ,$$

remarquons que le trièdre orthonormal le plus naturellement associé à une courbe tracée sur une surface semble être le trièdre de Ribaucour car sa rotation r (obtenue en faisant $d\psi = 0$ dans p) a pour valeur sur lui-même:

$$r / ds = \varkappa_G\, n - \mathfrak{T} t - \varkappa_N\, n \wedge t .$$

d. — *Rotation, courbures, torsion et composantes de* dM *et* d^2M. — 1. — Avant de calculer d^2M, indiquons quelques résultats utiles, comme dM est dans le plan tangent auquel $i_3 = n$ est normal, $dM = M^\alpha i_\alpha$, $\alpha = 1,2$, et comme sur la surface (S) $u^3 =$ const., en continuant à indiquer par un indice grec, un indice ne prenant que les valeurs 1 et 2, on peut écrire:

$$dM = M_\alpha du^\alpha \quad (\text{où} \quad M_\alpha = \partial M / \partial u^\alpha) ,$$

$$dM = M_\alpha{}^\mu i_\mu du^\alpha , \qquad M_\alpha = M_\alpha{}^\mu i_\mu ,$$

par suite:

$$g_{\alpha\beta} = M_\alpha \times M_\beta = M_\alpha{}^\mu i_\mu \times M_\beta{}^\nu i_\nu = (\mu\nu) M_\alpha^\mu M_\beta^\nu = M_\alpha^\mu M_\beta^\mu .$$

Si Φ est la forme quadratique $dM^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu$, en désignant par Φ_ε sa demi-dérivée en du^ε, on a:

$$\Phi_\varepsilon = g_{\varepsilon\alpha} du^\alpha = M_\varepsilon^\mu M^\mu .$$

Si H est le module de $M_1 \wedge M_2$ porté par n, on aura $M_\alpha \wedge M_\beta = (3\alpha\beta) Hn$, comparant à

$$M_\alpha \wedge M_\beta = M_\alpha{}^\mu i_\mu \wedge M_\beta{}^\nu i_\nu = M_\alpha^\mu M_\beta^\nu (\mu\nu r) i_r ,$$

où μ, ν ne prenant que les valeurs 1 et 2, l'unique valeur de r qui n'annule pas le symbole (abc) sera 3, il en résulte:

$$M_\alpha \wedge M_\beta = (3\alpha\beta) Hn = (3\mu\nu) M_\alpha^\mu M_\beta^\nu n .$$

(D'une manière générale $M_r \wedge M_s = H(rst) M^t$ où $H = M_1 \wedge M_2 \times M_3$. Cf. *Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles*, 1931, p. 30.)

2. — Ayant $d^2M = dM^\mu i_\mu + M^\mu p \wedge i_\mu$, comme

$$p \wedge i_\mu = - i_\mu \wedge p^s i_s = - (\mu s r) i_r p^s ,$$

$$d^2 M = i_r \left[(r\mu) dM^\mu - (r\mu s) M^\mu p^s \right] .$$

Le crochet étant $i_r \times d^2M$: 1° Si $r = 1, 2$:

$$M_\alpha \times d^2M = M_\alpha{}^\nu i_\nu \times d^2 M = M_\alpha^\mu dM^\mu - (\nu\mu s) M_\alpha^\nu M^\mu p^s ,$$

tenons compte que $(\nu\mu s)$ n'est différent de zéro que si $s = 3$, que

$$g_{\alpha\beta} = M_\alpha^\nu M_\beta^\nu \quad \text{dans} \quad M_\alpha \times d^2M = g_{\alpha\varepsilon} d^2 u^\varepsilon + [\alpha, \varepsilon\omega] du^\varepsilon du^\omega ,$$

puis que $(3\alpha\beta)\,\mathrm{H} = (3\mu\nu)\,\mathrm{M}_\alpha^\mu \mathrm{M}_\beta^\nu$ il reste après division par du^ε:

$$[\alpha\,,\ \varepsilon\omega]du^\omega = \mathrm{M}_\alpha^\mu d\mathrm{M}_\varepsilon^\mu - p^3(3\,\mu\nu)\,\mathrm{M}_\alpha^\mu \mathrm{M}_\varepsilon^\nu = \mathrm{M}_\alpha^\mu d\mathrm{M}_\varepsilon^\nu - p^3(3\,\alpha\varepsilon)\,\mathrm{H}\ ,$$

$$\mathrm{H}\,(3\,\alpha\varepsilon)\,p^3 = \mathrm{M}_\alpha^\mu d\mathrm{M}_\varepsilon^\mu - [\alpha\,,\ \varepsilon\omega]d^\omega\ . \qquad \text{(L. V., ch. II, éq. 43)}$$

On peut obtenir ce résultat à partir de

$$\mathrm{M}_\beta^\mu = \mathrm{M}_\beta \times i_\mu\ , \qquad d\mathrm{M}_\beta^\mu = \mathrm{M}_\beta \times p \wedge i_\mu + \mathrm{M}_{\beta\omega} du^\omega \times i_\mu\ ,$$

et:

$$\mathrm{M}_\alpha^\mu d\mathrm{M}_\beta^\mu = p \times \mathrm{M}_\alpha^\mu i_\mu \wedge \mathrm{M}_\beta + \mathrm{M}_\alpha{}^\mu i_\mu \times \mathrm{M}_{\beta\omega} du^\omega =$$

$$= p \times \mathrm{M}_\alpha \wedge \mathrm{M}_\beta + \mathrm{M}_\alpha \times \mathrm{M}_{\beta\omega} du^\omega = p \times (3\,\alpha\beta)\,\mathrm{H}n + [\alpha,\ \beta\omega]du^\omega\ .$$

2° Si $r = 3$, on aura

$$n \times d^2\mathrm{M} = -\,(3\,\mu s)\,\mathrm{M}^\mu p^s = \mathrm{M}^2 p^1 - \mathrm{M}^1 p^2\ ,$$

comme $n \times d^2\mathrm{M} = [3,\ \varepsilon\omega]\,du^\varepsilon du^\omega$ que nous désignerons par Ψ et sa demi-dérivée en du^ε par Ψ_ε, l'équation précédente pouvant s'écrire $(3\,\alpha\beta)\,p^\alpha \mathrm{M}^\beta = \Psi$, nous aurons

$$(3\,\alpha\beta)\,\mathrm{M}_\varepsilon^\beta p^\alpha = \Psi_\varepsilon = [3\,,\ \varepsilon\omega]du^\omega\ ,$$

le déterminant des coefficients étant $\mathrm{M}_2^2 \mathrm{M}_1^1 - \mathrm{M}_1^2 \mathrm{M}_2^1 = \mathrm{H}$, on a:

$$\mathrm{H}p^\alpha = (3\,\mu\nu)\,\mathrm{M}_\mu^\alpha \Psi_\nu\ ,$$

ou, sous la forme classique d'un déterminant

$$\mathrm{H}p^\alpha = \left|\mathrm{M}_\varepsilon^\alpha\ \Psi_\varepsilon\right|\ ,$$

et pour les rotations partielles (DARBOUX, L. V, ch. II, éq. 43 et 44):

$$\mathrm{H}p_\omega^1 = \left|\mathrm{M}_\varepsilon^1 \quad [3\,\varepsilon\omega]\right|\ ,$$

$$p_\omega^3 = \mathrm{M}_1^\mu\,\partial \mathrm{M}_2^\mu \big/ \partial u^\omega - [1\,,\ 2\,\omega] = -\,\mathrm{M}_2^\mu\,\partial \mathrm{M}_1^\mu \big/ \partial u^\omega + [2\,,\ 1\,\omega]\ ;$$

3. — Des formules précédentes nous tirons:

α. La formule classique de la courbure normale:

$$\varkappa \cos\theta = n \times \frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} = [3\,,\ \mu\nu]du^\mu du^\nu \big/ ds^2\ ,$$

β. La torsion géodésique:

$$\mathcal{C} ds^2 = - p \times t ds = - p \times d\mathrm{M} = - p^\alpha \mathrm{M}^\alpha = - \frac{1}{\mathrm{H}} (3\,\mu\nu)\, \mathrm{M}^\alpha \mathrm{M}_\mu{}^\alpha \Psi_\nu\ ,$$

$$\mathcal{C} ds^2 = \frac{(3\,\mu\nu)}{\mathrm{H}} \Psi_\mu \Phi_\nu = \frac{1}{4\,\mathrm{H}} \frac{\partial(\Psi\,,\,\Phi)}{\partial(du^1\,,\,du^2)}\ ,$$

ou sous une forme développée la formule classique:

$$\mathrm{H}\,\mathcal{C} ds^2 = \begin{vmatrix} [3\,,\,\varepsilon\mu] du^\mu & g_{\varepsilon\nu} du^\nu \end{vmatrix}\ .$$

γ. La courbure géodésique: prenons s comme variable sur la courbe:

$$d\mathrm{M} = t ds\ , \quad d^2\mathrm{M} = dt\, ds = \varkappa \hat{n}\, ds^2\ ,$$

$$d\mathrm{M} \wedge d^2\mathrm{M} = \varkappa\, ds^3\, t \wedge \hat{n} = \varkappa\, ds^3\, b\ , \qquad \sin\theta = n \times b\ ,$$

donc

$$\varkappa \sin\theta = n \times \frac{d\mathrm{M}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}\ ;$$

nous désignerons par un accent′ la dérivée par rapport à s, par suite

$$t = \mathrm{M}_\alpha u^{\alpha\prime}\ , \qquad d^2\mathrm{M} / ds^2 = \mathrm{M}_\varepsilon u^{\varepsilon\prime\prime} + \mathrm{M}_{\varepsilon\mu} u^{\varepsilon\prime} u^{\mu\prime}\ ;$$

comme

$$\mathrm{M}_{\varepsilon\mu} = \begin{bmatrix} r \\ \varepsilon\mu \end{bmatrix} \mathrm{M}_r = [r\,,\,\varepsilon\mu]\,\mathrm{M}^r\ ,$$

(ici les M^r constituent le repère réciproque du repère tangent formé par les M_r, et non plus $d\mathrm{M} \times i_r$), nous aurons deux formes pour le résultat, effectuons le calcul avec M_r en tenant compte du § 1,

$$\frac{d\mathrm{M}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} = (3\,\alpha\varepsilon)\, \mathrm{H} n u^{\alpha\prime} u^{\varepsilon\prime\prime} + \begin{bmatrix} r \\ \varepsilon\mu \end{bmatrix} \mathrm{H}\,(\alpha r \nu)\, \mathrm{M}^r u^{\alpha\prime} u^{\varepsilon\prime} u^{\mu\prime}\ ,$$

$$\varkappa \sin\theta = (3\,\alpha\varepsilon)\, \mathrm{H} u^{\alpha\prime} u^{\varepsilon\prime\prime} + \begin{bmatrix} r \\ \varepsilon\mu \end{bmatrix} \mathrm{H}\,(\alpha r 3)\, u^{\alpha\prime} u^{\varepsilon\prime} u^{\mu\prime}\ ,$$

comme $(3ar)$ se réduit à $(3\alpha\beta)$ on aura avec quelques changements d'indices muets.

$$\varkappa \sin\theta = \mathrm{H} u^{\alpha\prime} (3\,\alpha\varepsilon) \left(u^{\varepsilon\prime\prime} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{bmatrix} u^{\mu\prime} u^{\nu\prime} \right)\ ,$$

ou bien sous la forme classique d'un déterminant:

$$\varkappa \sin \theta = \mathrm{H} \left| u^{\varepsilon'} \quad u^{\varepsilon''} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{bmatrix} u^{\mu'} u^{\nu'} \right| ,$$

peut être moins maniable que la précédente (mais plus que l'interminable formule développée).

δ. L'étude des géodésiques peut se faire suivant les mêmes méthodes, mais, ainsi que dans ce § 3, on n'a pas intérêt à utiliser le trièdre orthonormal de Darboux, et comme c'était le but de ces pages, limitons-nous au calcul de la torsion d'une géodésique: la normale à la surface devant être la normale principale de la courbe, sa binormale sera $b = t \wedge n$, en différentiant par rapport à l'arc de géodésique nous avons pour la torsion:

$$\tau n = \frac{d\mathrm{M}}{ds} \wedge \frac{dn}{ds} ,$$

donc

$$\tau = \frac{dn}{ds} \times n \wedge t ,$$

mais

$$n \wedge t = \mathrm{M}_3 \wedge \mathrm{M}_\alpha u^{\alpha'} = \mathrm{H}(3\alpha\beta)\mathrm{M}^\beta u^{\alpha'} ,$$

$$\tau = \mathrm{M}_{3\mu} u^{\mu'} \times \mathrm{H}(3\alpha\beta)\mathrm{M}^\beta u^{\alpha'} ,$$

donc:

$$\tau = \mathrm{H}(3\alpha\beta) u^{\alpha'} \begin{bmatrix} \beta \\ 3\,\mu \end{bmatrix} u^{\mu'} .$$