

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Harris Hancock. — Development of the Minkowski Geometry of Numbers. Published with the aid of The Charles Phelps Taft Memorial Fund and of two Friends. — Un vol. gr. in-8° de xxiv-840 pages; prix \$ 12.00; The Macmillan Company, New-York, 1939.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIBLIOGRAPHIE

Harris HANCOCK. — **Development of the Minkowski Geometry of Numbers.**

Published with the aid of The Charles Phelps Taft Memorial Fund and of two Friends. — Un vol. gr. in-8° de xxiv-840 pages; prix \$ 12.00; The Macmillan Company, New-York, 1939.

Bel ouvrage américain inspiré par le génie de Minkowski et le grand talent du Professeur Harris Hancock. Nouvelle envolée des méthodes hermitiennes vers les conceptions modernes, en laquelle on retrouve les méthodes matricielles, le discontinu sous le continu, l'Arithmétique sous l'Analyse, les équations *homogénéisées* avant d'être arithmétisées. Avec Minkowski, Hermite entrevoyait « la Terre promise ». Et c'est bien un voyage vers cette Terre que nous effectuons maintenant. M. Emile Picard, dans la Préface des Œuvres de Charles Hermite, dit que les recherches de ce dernier ont ouvert des horizons tout à fait nouveaux en Théorie des Nombres. Hermite en disait autant de Minkowski. « Monsieur, lui écrivait-il, je me sens rempli d'étonnement et de plaisir devant vos principes et vos résultats; ils m'ouvrent comme un monde arithmétique entièrement nouveau où les questions fondamentales de notre science sont traitées avec un éclatant succès ! » On est tenté de ne rien ajouter à ce jugement émanant d'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Analysons cependant en commençant par les divisions régulières de l'espace situant des entiers et cependant divisions en lesquelles le continu s'étend par des transformations géométriques dont les plus simples sont de nature homothétique. Il est bien connu que toute équation $F(x, y, z) = 0$ peut s'écrire $f(x, y, z) = 1$ avec f homogène. C'est cette homogénéisation qui, dans les théories ondulatoires modernes, prépare la quantification, du moins entre autres procédés. Pourquoi ne préparerait-elle pas, de même, un procédé d'ordination des nombres en des régions spatiales à lier les unes aux autres selon la nature de f et en tentant d'emplir tout l'espace avec ces régions auxquelles on peut facilement assigner des formes polyédrales, puis des régions frontières inféodées à des propriétés numériques. Cela fait évidemment penser aux domaines fonctionnels où s'ébattent, par exemple, fonctions elliptiques et automorphes.

Seulement ces dernières fonctions doivent satisfaire à des conditions de continuité et surtout de définition qui ne leur laissent pas toujours une plénitude de propriétés arithmétiques. Ici, au contraire, l'arithmétique s'attache en toute liberté à un espace d'abord amorphe. Cet espace est ordonné vers des fins numériques. Il est d'abord remarquablement lié à la Théorie des corps convexes, c'est-à-dire des corps qui contiennent entièrement *toutes* leurs distances internes. Mais comme la notion de distance est, tout de même, plus générale que cela, il faut venir, ensuite, à des corps parfois concaves où cette notion est poursuivie de cellule en cellule avec le secours de surfaces types (Standard Surfaces). Les propriétés *inté-*

grales de telles surfaces semblent alors beaucoup plus importantes que leurs propriétés différentielles. Et c'est fort naturel. Les mesures d'étendue, les intégrations aboutissent au numérique, à un numérique beaucoup plus riche que celui qui est d'origine différentielle. C'est ainsi qu'il y a des *aires* gauches sans plans tangents. Et c'est toujours la recherche de l'étendue *standard* qui donne le *nombre* le plus remarquable, le plus pur et le plus riche en propriétés codifiables. Les analystes eulériens qui cherchaient des volumes et des aires remarquables faisaient déjà de la Géométrie minkowskienne mais ils se contentaient, et devaient se contenter, d'aboutissements isolés. Aujourd'hui nous avons, grâce à Minkowski et à M. Hancock, des résultats numériques qui se transforment en d'autres de par une instrumentation continue, qui se propagent dans des espaces différemment distanciés et qui vont même jusqu'à suggérer des généralisations ou des conceptions nouvelles de la distance. Jamais le Nombre ne fut plus essentiellement créateur; le réduire au rôle de résultat est de piètre imagination. Les transformations linéaires, conservant des transcendances mais n'en introduisant point de nouvelles, s'imposent évidemment dans de telles considérations qui cependant ne vont pas sans les nombres *algébriques* provenant, comme racines, du déterminant de la transformation. Les fractions continues restent non seulement d'admirables instruments d'approximation mais il ne fallait sans doute qu'une bonne idée pour penser que leur aspect arithmétique pouvait donner naissance à des schèmes géométriques plus esthétiques encore et donnant, eux aussi, naissance à des sortes d'enchaînements.

Il me faut maintenant être de plus en plus bref et non sans regret dans ces domaines qui tiennent du prodigieux. Voici les formes quadratiques et les ds^2 . Certes ce n'est pas Albert Einstein qui a dit le premier que l'Univers était Nombre mais l'Univers einsteinien ne saurait échapper à la loi commune et si, dans les réseaux de nombres, s'imposent des aires et des volumes qui sont des étendues « standard », il doit en être de même pour ces ds^2 qui deviennent ainsi arithmétisables.

L'auteur revient encore longuement sur les fractions continues et notamment sur les approximations diophantiques qui furent particulièrement chères à Minkowski. D'autre part, Jacobi et Kronecker, sans peut-être toujours s'en rendre compte, préparèrent la matière géométrique par de merveilleuses finesses d'analyse. Abel fit quelque chose d'analogue en préparant l'approximation périodique de nombres algébriques. Il y a des chaînes de substitutions à caractère périodique et tout cela conduit à des méthodes d'approximation laissant loin la Théorie des fractions continues encore que l'existence de celle-ci soit toujours perceptible et son influence certaine.

Il y a une curieuse arithmétique de l'ellipsoïde, de même qu'il y a de curieuses aires ellipsoïdales fort distinctes de l'aire totale. Les intégrations successives peuvent ordonner certains réseaux de points et il existe des corps « standard » extrêmes pour lesquels des inégalités d'existence se transforment en égalités. Disposer de corps homologues en un assemblage aussi dense que possible revient à la considération de certaines variations intégrales, d'où une sorte de Calcul des variations dû à des transformations linéaires.

Nous passons sur beaucoup de choses et il n'en peut être autrement. L'œuvre de M. Harris Hancock est un véritable poème qui peut être accordé

avec toutes les grandes théories mathématiques modernes, tout comme cela est possible pour l'œuvre même de Charles Hermite, particulièrement dans ses formes matricielles. Ici, les esthétiques variabilités des caractères algébriques se traduisent dans des domaines physiques et donnent les merveilles non moins grandes de la Mécanique ondulatoire, laquelle tend à nous mener vers l'essence des choses. Un Minkowski a dû rêver à des constructions analogues pour nombres et mesures, ce qui, au fond, est équivalent.

M. Harris Hancock a tout repris sur de nouveaux frais et il nous livre aujourd'hui un livre splendide représentant sans doute plusieurs années de travail et allant bien au delà de la *Geometrie der Zahlen*. Hélas ! Pourquoi n'avons-nous pas, dans tous les domaines internationaux, rien que des unions et prolongements de ce genre ? A. BUHL (Toulouse).

M. H. A. NEWMAN. — **Elements of the Topology of plane sets of points.** —

Un vol. in-8° de 221 pages et 93 figures; relié, 12s. 6d.; Cambridge University Press, 1939.

La première partie du présent ouvrage (pp. 3-87) constitue une introduction à la Topologie générale. Elle traite des questions suivantes: le calcul des ensembles et la notion du dénombrable, les ensembles fermés et les ensembles ouverts, le concept général d'espace topologique, les propriétés des transformations continues d'un ensemble quelconque, définition des ensembles connexes ou localement connexes et étude de leurs propriétés fondamentales. Pour terminer, deux théorèmes remarquablement élégants fournissant une caractérisation topologique du segment et de la circonférence; citons le dernier: « un continu (c'est-à-dire un ensemble compact et connexe contenant plus d'un point) qui cesse d'être connexe lorsqu'on en supprime deux points quelconques est une courbe simple fermée (c'est-à-dire est homéomorphe à la circonférence) ».

La seconde partie (pp. 90-199) est consacrée à l'étude des propriétés particulières aux ensembles de points du plan et fait intervenir les méthodes combinatoires. Elle débute par les théorèmes de séparation: théorème de Jordan et autres théorèmes analogues; la démonstration, basée sur la théorie des chaînes (mod. 2) et sur un lemme d'Alexander, paraît véritablement ne rien laisser à désirer au point de vue de la simplicité. A seule fin de montrer la puissance de la méthode, l'auteur établit quelques théorèmes relatifs à l'espace à n dimensions: invariance topologique du nombre de dimensions et des domaines, extension du théorème classique de Jordan. L'étude des domaines simplement connexes est suivie d'une application intéressante au théorème de Cauchy sur l'intégration dans le domaine complexe. Les domaines limités par une courbe de Jordan jouissent de la propriété que leurs points frontières sont accessibles; cette propriété est établie au chapitre VII, où l'on voit aussi dans quelle mesure elle est caractéristique des domaines jordanien. Le chapitre VIII et dernier introduit l'ordre de connexion d'un domaine avec ses propriétés essentielles. Quelques notes fournissent d'utiles références; signalons une omission: la partie essentielle du théorème 21.2 (cas particulier du théorème de dualité d'Alexander) est due à M. Henri Lebesgue. Un index très commode permet de retrouver immédiatement la définition de tous les termes employés.

En rendant aisément accessibles les méthodes récentes et si simples