Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1942-1950)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE DMITRY MIRIMANOFF

Autor: Vandiver, H. S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515802

LES TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE DMITRY MIRIMANOFF [1]

PAR

H. S. VANDIVER (Austin, Texas).

Dmitry Mirimanoff, professeur honoraire de l'Université de Genève, est décédé le 5 janvier 1945 dans sa 84e année. Son œuvre scientifique comprend plus de soixante publications dont on trouvera la liste à la fin de cette Notice.

Les travaux de Mirimanoff appartiennent à la théorie des nombres, à la théorie des ensembles et au calcul des probabilités. C'est surtout vers les problèmes les plus délicats de la théorie des nombres que s'étaient dirigés les efforts de son esprit de recherche. Le but de cette Notice est de présenter les remarquables résultats qu'il a obtenus dans ce domaine.

* * *

Dans le Mémoire [14] [2], Mirimanoff adresse une lettre à K. Hensel, dans laquelle il montre que la loi de réciprocité de Legendre (loi de réciprocité quadratique pour les nombres premiers impairs) est une conséquence de la relation

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = (-1)^{n-h} ,$$

où D est le discriminant du polynôme $\mathrm{E}(x)$ de degré n à coefficients entiers rationnels, p est un nombre premier tel que $\mathrm{D} \not\equiv 0 \pmod{p}$, et h est le nombre de facteurs irréductibles suivant le module p à coefficients entiers, la relation

[1] Traduit de l'anglais par Mlle S. PICCARD, professeur à l'Université de Neuchâtel.
[2] Les nombres entre crochets renvoient à la liste des publications.

en question étant appliquée à un domaine défini par une certaine racine de l'unité. Dans [15], Mirimanoff utilise la relation susmentionnée pour examiner les solutions possibles des congruences du troisième degré à une inconnue.

* * *

Tous les autres travaux de Mirimanoff que nous allons examiner ont trait au dernier théorème de Fermat ou à des sujets qui lui sont étroitement liés. On donne le nom de « dernier théorème de Fermat » à l'affirmation bien connue de Fermat que l'égalité

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

est impossible quel que soit l'entier $n > 2$, x, y, z étant des entiers rationnels non nuls. Pour démontrer le théorème de Fermat, il suffit de prouver que l'équation

$$x^l + y^l + z^l = 0 \tag{2}$$

où l est un nombre premier impair, n'admet pas de solutions entières non nulles en x, y, z. Kummer [1] a démontré que l'équation (2) est impossible si l est un nombre premier régulier, c'est-à-dire un nombre premier tel que les nombres de Bernoulli $B_1, B_2, \ldots, B_d$, $d = \frac{l-3}{2}$, $l > 3$, réduits à leur plus simple expression ($B_1 = {}^1/_6$, $B_2 = {}^1/_{30}$, $B_3 = {}^1/_{42}$, etc.) ont tous des numérateurs premiers avec l. Nous comptons également 3 parmi les nombres premiers réguliers. Kummer a également trouvé que tous les nombres premiers inférieurs à 100, à l'exception de 37,59 et 67, étaient réguliers. En vue de s'attaquer au problème pour les nombres premiers irréguliers, il avança des critères [2] impliquant des propriétés des entiers dans un domaine algébrique défini par une racine l^{me} de l'unité [3]. En appliquant ces

---

1 *Journ. für Math.*, 40; 130-138: 1850; *Journ. de Math.*, I, 16, 488-498, 1851.

2 *Abhandl. der Königl. Akademie der Wissenschaften* zu Berlin, Math.-Phys. Klasse, 1857, 41-74; résumé dans les *Berlin. Monatshefte*, 1857, 275-282.

3 Pour un compte rendu détaillé des travaux concernant le dernier théorème de Fermat, impliquant la théorie des nombres algébriques, voir H. S. Vandiver and G. E. Wahlin, Report on the Theory of Algebraic Numbers II, *Bull. of the National Research Council*, Washington, 62, Feb. 1928. Voir aussi les *American Math. Monthly*, 53, 555-578, 1946.

critères, il fut en mesure de démontrer le théorème de Fermat pour $l = 37, 59, 67$ dans (2).

Les méthodes employées par Kummer dans le cas d'exposants premiers irréguliers dans (2) dépendent surtout du nombre des classes d'idéaux dans le domaine cyclotomique $k(\zeta)$, où $\zeta = e^{2i\pi/l}$: Deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ font partie d'une même classe d'idéaux s'il existe deux idéaux principaux (α) et (β), tels que

$$(\alpha)\,\mathfrak{b} = (\beta)\,\mathfrak{a}\ ,$$

où (α) et (β) sont des entiers de $k(\zeta)$, tels que $\alpha\beta \neq 0$. Le nombre des classes (cf. la note 3, page précédente, seconde référence, pp. 567-8) pour la discussion de ce concept et les expressions pour le nombre de classes de $k(\zeta)$) d'idéaux dans $k(\zeta)$ est fini. Soit h ce nombre. Nous écrivons $h = h_1 h_2$, les facteurs h_1 et h_2 étant respectivement le premier et le second facteur du nombre des classes, $h_1 > 0$, $h_1 > 0$.

Dans [5], Mirimanoff a donné un critère un peu différent de celui de Kummer [1] (pp. 480-1) pour la divisibilité de h_2 par l. Il applique son critère au cas de $l = 37$ et montre que dans ce cas h_2 est premier avec 37, comme Kummer (cf. note 2, page précédente, *loc. cit.*, p. 73) l'avait déjà prouvé.

Dans [6], notre auteur considère l'équation (2) pour $l = 37$ et prouve son impossibilité pour cette valeur de l. Il a été prouvé plus tard [1] que cette méthode s'applique aussi à d'autres exposants de la forme $4n + 1$ dans (2).

Dans [7], Mirimanoff traite la congruence

$$\frac{r^{p-1} - 1}{l} \equiv q_r \pmod{l}\ . \tag{3}$$

pour l premier. A cet effet, il examine l'expression $\dfrac{a^d - 1}{l}$ où a appartient à l'exposant d (mod l). Il montre comment on peut mettre cette expression sous la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 a^{k_1} + \alpha_2 a^{k_2} + \cdots + \alpha_n a^{k_n}\ ,$$

[1] *Trans. Am. Math. Soc.*, 24, p. 472, 1918.

où les coefficients sont des nombres de la suite 0, 1, 2, 3, ..., $(a - 1)$ et

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < d \, .$$

Comme on le sait bien, le quotient de Fermat (3) est intimement lié à la théorie de (2).

Dans [13], Mirimanoff considère (2), où x, y, z sont premiers avec l et l est un nombre premier impair. Ce cas de (2) est appelé le cas I du dernier théorème de Fermat. Kummer (*l. c.*, p. 278) a montré que si (2) est vrai dans le cas I, alors

$$B_{\frac{l-i}{2}} P_i (x, y) \equiv 0 \pmod{l} \, , \tag{4}$$

$i = 3, 5, ..., l - 2$, où

$$\frac{d^i \log (x + e^v y)}{dv^i} = \frac{P_i (x, y)}{Q_i (x, y)} \, ,$$

et

$$Q_i (x, y) = (x + y)^i \, .$$

Mirimanoff s'exprime comme suit au sujet de ces critères: « La belle méthode que Kummer a fait connaître dans son mémoire de 1857 n'a peut-être pas été assez remarquée ni assez appréciée. » Il est très curieux de noter qu'aucun mathématicien [1] ne semble avoir considéré ces relations de Kummer entre les années 1857 à 1904.

Si l'on remplace $P_i (1, t)$ par $P_i (t)$, $t = y/x$, (4) donne

$$B_{\frac{l-i}{2}} P_i (t) \equiv 0 \pmod{l} \, , \tag{5}$$

$i = 3, 5, ..., l - 2$, où t prend l'une quelconque des valeurs

$$\frac{x}{y}, \; \frac{y}{x}, \; \frac{x}{z}, \; \frac{z}{x}, \; \frac{y}{z}, \; \frac{z}{y} \, .$$

Notre auteur a également trouvé, en utilisant certains résultats d'Euler, que

$$P_i (t) = a_{i,1} \, t - a_{i,2} \, t^2 + \cdots + (-1)^i a_{i,i-1} \, t^{i-1} \, , \tag{6}$$

---

[1] A l'exception de CELLÉRIER, *Mém. Soc. Phys. et d'Hist. nat. Genève*, 32, n° 7, 16-42 (1894-1897) qui les transforme de certaines façons, sans toutefois obtenir de nouveaux résultats en ce qui concerne 2).

où

$$a_{i,j} = j^{i-1} - \binom{i}{1}(j-1)^{i-1} + \binom{i}{2}(j-2)^{i-1} - \cdots + (-1)^{j-1}\binom{i}{j-1}, \quad (7)$$

En utilisant la congruence (5) pour $i = 3, 5, 7$ et 9, Mirimanoff prouve que si (2) est satisfait par des nombres x, y, z premiers à l, alors chacun des nombres de Bernoulli $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$, $B_{\nu-3}$, $B_{\nu-4}$, où $\nu = \frac{l-1}{2}$, est divisible par l. (Les deux premiers de ces critères avaient été donnés par Kummer.) En se basant sur ce fait, il a montré que (2) n'a lieu pour aucun nombre premier l inférieur à 257 (ce qui a été prouvé par Legendre et Maillet pour $l < 223$) pour x, y, z premiers avec l.

Mirimanoff utilise l'expression de $P_i(t)$ donnée par (6) et (7) et obtient

$$(1+t)^{l-i} P_i(t) \equiv t - 2^{i-1} t^2 + 3^{i-1} t^3 - \cdots + (-1)^{l-2} (l-1)^{i-1} t^{l-1} .$$

En désignant par $\varphi_i(t)$ le second membre de cette congruence, nous pouvons remplacer le critère (5) de Kummer par

$$B_{\frac{l-i}{2}} \varphi_i(t) \equiv 0 \pmod{l} . \quad (8)$$

$i = 3, 5, \ldots, l-2$. Mirimanoff a également trouvé que

$$\varphi_{l-1}(t) \equiv 0 \pmod{l} . \quad (9)$$

Ces transformations et les formules (8) et (9) constituent, à mon avis, une de ses deux principales contributions à la théorie relative au dernier théorème de Fermat. Elles ont exercé une grande influence sur nombre d'auteurs qui se sont occupés du premier cas du dernier théorème de Fermat, et leur emploi a finalement permis à D. H. et à Emma Lehmer en 1941 de démontrer le théorème dans le cas I pour tous les exposants $l < 253, 747, 889$. Le point de départ de toutes ces recherches a été le résultat établi par Wieferich en 1909, en utilisant (8) et (9), que $q(2)$ (défini dans (3)) est divisible par l, si (2) est vrai dans le cas I.

Les polynômes $\varphi_i(t)$ ont été appelés par de nombreux auteurs les *polynômes de Mirimanoff*. Mirimanoff a prouvé que les critères (8) et (9) sont équivalents à

$$\varphi_{l-i}(t)\,\varphi_i(t) \equiv 0 \pmod{l}\,, \tag{10}$$

$$\varphi_{l-1}(t) \equiv 0 \pmod{l}\,, \tag{11}$$

$i = 2, 3, \ldots, \nu$. Ces critères sont connus sous le nom de *critères de Mirimanoff* pour la solution de (2) dans le cas I.

Mirimanoff a fait une étude approfondie des polynômes $\varphi(t)$ et il obtint, entre autres, les résultats de la page 61 de [13] au sujet desquels Frobenius [1] s'est exprimé comme suit: « Daraus hat Hr. Mirimanoff drei merkwürdige Formeln abgeleitet, die fortzusetzen oder zu verallgemeinern leider noch nicht gelungen ist. »

Dans [19], Mirimanoff établit une connexion entre la théorie de (2) et la théorie des fonctions symétriques élémentaires $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + xz + yz$, $s_3 = xyz$. Le premier membre de (2) peut se mettre sous forme d'un polynôme en s_1, s_2, s_3. En égalant cette fonction à zéro et en considérant au lieu de cette équation ainsi que d'autres s'y rattachant les congruences correspondantes mod l, Mirimanoff obtient des résultats qui, appliqués à des cas particuliers, prouvent l'impossibilité de (2) pour $l = 3, 5, 11$ et 17, dans le cas I.

Examinons maintenant un autre travail essentiel de Mirimanoff concernant le dernier théorème de Fermat, notamment [25]. En utilisant l'égalité

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1} \frac{B_i}{(2i)!} x^{2i}\,,$$

Mirimanoff trouve

$$x \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{\alpha_i}{e^x - \alpha_i} = -\frac{m-1}{2} x + \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1} (m^{2i} - 1) \frac{B_i}{(2i)!} x^{2i}\,,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ sont les racines de $(z^m - 1)/(z - 1) = 0$.

---

1 *Sitzungsberichte der K. P. Akademie der Wiss.*, Berlin, 1910, p. 843.

En posant $e^x = 1 + t$ et par une ingénieuse méthode, Mirimanoff obtient l'importante identité modulo l,

$$- \varphi_{l-1}(t) \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{\alpha_i}{t + \alpha_i} + (1 + t)^{l-1} \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(\frac{\alpha_i R_i}{t + \alpha_i} + \frac{\alpha_i R_i}{1 - \alpha_i} \right)$$

$$\equiv - \frac{m-1}{2} \varphi_{l-1}(t) + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} (-1)^{i-1} (m^{2i} - 1) B_i \varphi_{l-2i}(t)$$

$$+ (-1)^{\nu-1} (m^{l-1} - 1) \frac{B_\nu}{(l-1)!} (1 + t)^{l-1} ,$$

où m est un entier quelconque premier avec l et

$$R_i \equiv \frac{\varphi_{l-1}(-\alpha_i)}{(1 - \alpha_i)^{l-1}} .$$

En utilisant (8), (9) et la relation

$$q(m) \equiv \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{R_i}{1 - \alpha_i} \pmod{l} ,$$

il obtient

$$\prod_{i=1}^{i=m-1} (t + \alpha_i) \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{R_i}{t + \alpha_i} \equiv 0 \pmod{l} . \qquad (12)$$

En posant $m = 2$ et $m = 3$ dans cette relation et en s'appuyant sur le fait que les congruences (8) et (9) sont satisfaites en général par six valeurs incongruentes de t, il obtient le critère

$$q(2) \equiv q(3) \equiv 0 \pmod{l} .$$

A l'aide de la formule (12) et de ses généralisations, les successeurs de Mirimanoff ont trouvé que $q(m) \equiv 0 \pmod{l}$ pour tout nombre premier $m < 44$ et ceci a conduit au résultat déjà cité de D. H. et de Emma Lehmer. On ne sait pas encore s'il existe au moins un nombre premier l pour lequel tous les critères (12) sont vrais. Comme nous l'avons déjà noté, les valeurs $m = 2$ et $m = 3$ donnent $q(2) \equiv q(3) \equiv 0 \pmod{l}$ et il n'existe aucune valeur connue de l qui satisfasse à l'ensemble de ces deux relations pour $l < 16\,000$. Même si ces deux relations étaient satisfaites pour quelque valeur de l, il y aurait encore une congruence (12) qui devrait être satisfaite pour toute valeur de $m > 3$.

Dans [50], par de simples considérations géométriques appliquées à la courbe $x^3 + y^3 = 1$, Mirimanoff montre comment obtenir les critères de FUETER et de BURNSIDE concernant la résolution de l'équation

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$$

dans l'anneau des entiers du domaine défini par $\sqrt{n}$.

* * *

L'auteur a eu le plaisir de rencontrer à deux reprises à Genève le professeur Mirimanoff, une première fois au printemps 1928 et une seconde fois à la fin de l'année 1930. J'ai trouvé en lui un charmant gentleman. Parmi d'autres choses, il me dit que cela lui a demandé un très grand effort de trouver l'erreur dans la tentative de FABRY de démontrer le dernier théorème de Fermat. Il releva cette erreur dans [29]. L'effort qu'il a dû fournir à cet effet semble avoir été responsable du fait que chaque fois qu'il voulait se concentrer plus tard sur quelque problème de la théorie des nombres, il souffrait de violents maux de tête. Il n'a publié depuis que deux travaux relatifs à ce domaine: [50] dont nous avons déjà exposé le contenu et [54] qui est plutôt une discussion du contenu du travail [5] publié antérieurement.

Dans un autre entretien, je lui ai dit qu'il me semblait que le second facteur du nombre de classes, notamment h_2 (défini en connexion avec notre précédente discussion du nombre de classes) est toujours premier avec l, mais que j'étais incapable de le prouver. Il répondit qu'après avoir examiné h_2 dans son travail [7], il a présumé la même chose.

Liste des publications du Professeur Dmitry Mirimanoff

ABRÉVIATIONS

Actes Soc. helv. sc. nat.: Actes de la Société helvétique des sciences naturelles.
Ann. der Physik.: Annalen der Physik, Halle et Leipzig.
Arch. sc. phys.: Archives des sciences physiques et naturelles. Genève.
C. R.: Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris.

Comm. math. helv.: Commentarii Mathematici Helvetici. Zurich.

Ens. math.: L'Enseignement mathématique. Revue internationale. Genève et Paris.

Fundam. math.: Fundamenta Mathematicae. Varsovie.

Jahrb.: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Berlin, (Les renvois au « Jahrbuch » concernent les analyses sommaires insérées dans ce périodique.)

Journ. für Math.: Journal für die reine u, angewandte Mathematik. Berlin.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. Leipzig.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de Mathématiques. Paris.

1. Note sur un problème de Géométrie, *J. de Math. élém. de M. Ermakoff*, vol. 1, nº 18 (1885) (en russe).
2. Sur un théorème de la mécanique, *J. de. Math. élém. de M. Ermakoff*, vol. 2, nº 6 (1885).
3. Assemblages de carrés, *J. de Math. élém. de M. Ermakoff*, vol. 2, nº 12 (1886).
4. Sur un problème de géométrie, *J. de Math. élém. de M. Ermakoff*, vol. 2, nº 18 (1886).
5. Sur une question de la théorie des nombres, *Journ. für Math.*, vol. 109 (1891), 82-88; *Jahrb.*, vol. 23 (1891), 184.
6. Sur l'équation $x^{37} + y^{37} + z^{37} = 0$, *Journ. für Math.*, vol. 111 (1893), 26-30; *Jahrb.*, vol. 25 (1893-4), 296.
7. Sur la congruence $(r^{p-1} - 1) : p \equiv q_r \pmod{p}$, *Journ. für Math.*, vol. 115 (1895), 295-300; *Jahrb.*, vol. 26 (1895), 209.
8. Réduction des fonctions rationnelles entières de plusieurs variables à la forme canonique (en russe), *Math. Sbornik* (recueil Sc. math. de Moscou), vol. 19 (1897).
9. Sur les bases du calcul de généralisation, Diss. Geneve, 80 pp. (1900); *Jahrb.*, vol. 32 (1901), 293.
10. Racines cubiques de nombres entiers et multiplication complexe dans les fonctions elliptiques, *Math. Ann.*, vol. 56 (1902), 115-128; *Jahrb.*, vol. 33 (1902), 219.
11. Sur l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$, *Nouv. Ann.*, (4), vol. 3 (1903), 17-21; *Jahrb.*, vol. 34 (1903), 226.
12. Sur l'équation $(x + 1)^l - x^l - 1 = 0$, *Nouv. Ann.*, (4), vol. 3 (1903), 385-397; *Jahrb.*, vol. 34 (1903), 109.
13. L'équation indéterminée $x^l + y^l + z^l = 0$ et le critérium de Kummer, *Journ. für Math.*, vol. 128 (1904), 45-68; *Jahrb.*, vol. 35 (1904), 216.
14. (Avec K. Hensel.) Sur la relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-h}$ et la loi de réciprocité, *Journ. für Math.*, vol. 129 (1905), 86-87; *Jahrb.*, vol. 36 (1905), 286.
15. Sur les congruences du troisième degré, *Ens. math.*, vol. 9 (1907), 381-384; *Jahrb.*, vol. 38 (1907), 241.
16. Sur la théorie des électrons, *Arch. sc. phys.*, vol. 25 (1908), 172-189.
17. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper von Lorentz und das Prinzip der Relativität, *Ann. der Phys.*, vol. 28 (1909), 192-198; *Jahrb.*, vol. 40 (1909), 928.
18. Bemerkung zur Notiz von A. Einstein «Bemerkung zu ...», *Ann. der Phys.*, (4), vol. 28 (1909), 1088; *Jahrb.*, vol. 40 (1909), 929.
19. Sur le dernier théorème de Fermat, *Ens. math.*, vol. 11 (1909), 49-51; *Jahrb.*, vol. 40 (1909), 257.

20. Quelques essais de démonstration du grand théorème de Fermat, *Ens. math.*, vol. 11 (1909), 126-129.
21. Sur le dernier théorème de Fermat et le critérium de M. A. Wieferich, *Ens. math.*, vol. 11 (1909), 455-459; *Jahrb.*, vol. 40 (1909), 257.
22. Sur le dernier théorème de Fermat, *C. R.*, vol. 150 (1910), 204-206; *Jahrb.*, vol. 41 (1910), 236.
23. Sur le dernier théorème de Fermat, *Actes Soc. helv. sc. nat.*, Bâle (1910).
24. Sur le dernier théorème de Fermat, *Ens. math.*, vol. 12 (1910), 524-525.
25. Sur le dernier théorème de Fermat, *Journ. für Math.*, vol. 139 (1911), 309-324; *Jahrb.*, vol. 42 (1911), 217.
26. Sur un certain développement en fraction continue, *Ens. math.*, vol. 14 (1912), 294-298; *Jahrb.*, vol. 43 (1912), 284.
27. Sur quelques problèmes concernant le jeu de trente et quarante, *Actes Soc. helv. sc. nat.*, vol. II (Altdorf 1912), 133-135.
28. Sur quelques problèmes concernant le jeu de trente et quarante, *Ens. math.*, vol. 15 (1913), 231-233; *Jahrb.*, vol. 44 (1913), 266.
29. Remarque sur une Communication de M. Eugène Fabry, *C. R.*, vol. 157 (1913), 491-492; *Jahrb.*, vol. 44 (1913), 233.
30. Sur quelques points de la théorie des ensembles, *Ens. math.*, vol. 16 (1914), 29-30; *Jahrb.*, vol. 45 (1914-1915), 126.
31. Sur le théorème des tuiles (avec M[me] Chisholm Young), *Ens. math.*, vol. 17 (1915), 348; *Jahrb.*, vol. 45 (1914-1915), 132.
32. Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des Ensembles, *Ens. math.*, vol. 19 (1917), 37-52; *Jahrb.*, vol. 46 (1916-1918), 306.
33. Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes, I, *Ens. math.*, vol. 19 (1917), 209-217; *Jahrb.*, vol. 46 (1916-1918), 306.
34. Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes, II, *Ens. math.*, vol. 21 (1920), 29-52; *Jahrb.*, vol. 47 (1919-1920), 183.
35. La transformation de Lorentz-Einstein et le temps universel de M. Ed. Guillaume, *C. R. Soc. de phys. et hist. nat. de Genève*, vol. 38 (1921), 46-48.
36. Sur un problème de la théorie de la mesure, *Ens. math.*, vol. 22 (1922), 299-300.
37. Sur un problème de la théorie de la mesure, I, *Fundam. math.*, vol. 4 (1923), 76-81; *Jahrb.*, vol. 49 (1923), 146.
38. Sur un problème de la théorie de la mesure, II, *Fundam. math.*, vol. 4 (1923), 118-121; *Jahrb.*, vol. 49 (1923), 146.
39. Remarque sur la notion d'ensemble parfait de 1[re] espèce, *Fundam. math.*, vol. 4 (1923), 122-123; *Jahrb.*, vol. 49 (1923), 146.
40. A propos de l'interprétation géométrique du problème du scrutin, *Ens. math.*, vol. 23 (1923), 187-189; *Jahrb.*, vol. 50 (1924), 656.
41. Le jeu de pile ou face et les formules de Laplace, *C. R.*, vol. 182 (1926), 1119-1121; *Jahrb.*, vol. 52 (1926), 516.
42. Les épreuves répétées et la méthode des fractions continues de Markoff, *Ens. math.*, vol. 25 (1926), 111-118; *Jahrb.*, vol. 52 (1926), 516.

43. Les épreuves répétées et les formules de Laplace (avec R. Dovaz), *C. R.*, vol. 185 (1927), 827-828; *Jahrb.*, vol. 53 (1927), 496.
44. Sur une formule de M. de Montessus de Ballore et les courbes binomiales, *Ens. math.*, vol. 26 (1928), 287-293; *Jahrb.*, vol. 54 (1928), 550.
45. Sur les courbes binomiales (avec M^lle^ S. Piccard), *C. R.*, vol. 186 (1928), 1687-1689; *Jahrb.*, vol. 54 (1928), 550.
46. Sur une formule de M. de Montessus de Ballore, *Ens. math.*, vol. 27 (1928), 144-145; *Jahrb.*, vol. 54 (1928), 550.
47. Les épreuves répétées et les formules approchées de Laplace et de Charlier, *Comm. Math. Helv.*, vol. 1 (1929), 15-41; *Jahrb.*, vol. 55^2 (1929), 914.
48. Le jeu de pile ou face et les formules de Laplace et de J. Eggenberger, *Comm. Math. Helv.*, vol. 2 (1930), 133-168; *Jahrb.*, vol. 56^2 (1930), 446.
49. Lois de probabilité et polynômes d'Hermite, *Comm. Math. Helv.*, vol. 3 (1931), 226-243; *Jahrb.*, vol. 57^2 (1931), 613.
50. L'équation $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$ et la courbe $x^3 + y^3 = 1$, *Comm. Math. Helv.*, vol. 6 (1934), 192-198; *Jahrb.*, vol. 60^1 (1934), 127.
51. Sur un théorème de Cournot, I, *Ens. math.*, vol. 32 (1933), 151-154; *Jahrb.*, vol. 60^2 (1934), 461.
52. Sur un théorème de Cournot, II, *Ens. math.*, vol. 32 (1933), 297-303; *Jahrb.*, vol. 60^2 (1934), 461.
53. Un théorème d'arithmétique, *Mathesis*, vol. 48 (1934), 183; *Jahrb.*, vol. 60^1 (1934), 48.
54. Sur les nombres de Bernoulli, *Ens. math.*, vol. 36 (1937), 228-235.
55. Expressions de la somme de deux indéterminées en fonction du produit, *Comm. Math. Helv.*, vol. 14 (1941), 1-22; *Mathematical Reviews*, vol. 3 (1942), 259.
56. Expressions de la somme $x_1 + x_2$ de deux indéterminées x_1, x_2 en fonction de $x_1 x_2 + c\,(x_1 + x_2)$, *Comm. Math. Helv.*, vol. 14 (1942), 310-313; *Mathematical Reviews*, vol. 3 (1942), 259.
57. L'intuitionisme, *Alma Mater* n° 6, Genève (1945).
58. Expression du produit de deux indéterminées en fonction de la somme, *Comm. Math. Helv.*, vol. 15 (1943), 45-48; *Mathematical Reviews*, vol. 5 (1944), 225.
59. La loi forte des grands nombres et la loi du logarithme itéré, *Bull. Soc. vaudoise des Sc. nat., Lausanne*, vol. 62 (1943), n° 259, 169-180.
60. Description d'une famille d'appareils pour diviser un angle en un nombre quelconque de parties égales, *Ens. math.*, vol. 39 (1942-1950), 61-68.

Appendice. — *Analyses bibliographiques*, au nombre de 44, publiées dans *L'Ens. math.*, de 1903 à 1934. Elles concernent les ouvrages ayant pour auteurs MM. Arnoux, Bachmann, Barbette, Bieberbach, Burnside, Dingler, Fouet, Fueter, Galbrun, Godefroy, Grimsehl, Guillaume, Hensel, Hobson, Hurwitz-Courant, Jéquier, Kamke, König, Kraitchik, Laisant, Landau, Landfriedt, Le Vasseur, Lobacevski, Polya-Szegö, Schaewen, Schlesinger-Plessner, Vassilief, Wangerin.