Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Autor: Ostrowski, A.

Kapitel: VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

Si enfin $f(x)$ jouit de la propriété E et $g(x)$ est non croissante, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(\mathrm{N}+1)\,g(x)}{f(n)\,g(\Psi(x))} \leq \frac{f(\mathrm{N}+1)\,g(n)}{f(n)\,g(\mathrm{N}+1)} \leq 1 .$$

Notre lemme est démontré.

Soit maintenant $\Psi(x)$ une fonction conjuguée satisfaisant à la condition $\Psi(x) \geq x + 1$. En remplaçant dans le lemme qui vient d'être démontré $\Phi(x)$ par $\Psi'(x)$ on voit que si la convergence de la série $\Sigma g(\nu)$ se démontre au moyen du critère B d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$ il en est de même pour la série $\Sigma f(\nu)$. De même, si la divergence de la série $\Sigma f(\nu)$ se démontre au moyen du critère (I,7) d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$, il en est de même pour $\Sigma g(\nu)$.

Posons en particulier $\Psi(x) = e^x$. Alors les fonctions

$$\mathrm{L}_n(x)\, lg_n^{1+s}\, x \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

jouissent de la propriété E. D'autre part, nous avons vu que le critère B d'Ermakoff (avec $\Psi(x) = e^x$) s'applique directement à toutes ces séries. Ainsi, en interpolant les a_ν entre deux entiers successifs par des fonctions linéaires, il en résulte:

Les critères de seconde espèce utilisant comme série de comparaison une des séries de Morgan-Bertrand sont contenus dans le critère B d'Ermakof pour $\Psi(x) = e^x$ *s'il s'agit d'une série* $\Sigma\, a_\nu$ *à termes non croissants ou bien si l'on a* $\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \longrightarrow 1$.

VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur la sensibilité relative des critères B d'Ermakof correspondant aux différents choix de la fonction conjuguée $\Psi(x)$. A ce sujet, on trouve dans la première note d'Ermakof deux assertions dont les démonstrations vaguement esquissées ne paraissent pas très satisfaisantes. Nous allons montrer que ces énoncés sont inexacts.[1]

[1] E. I, pp. 253-254. L'erreur d'Ermakof consiste en ce qu'il suppose que le quotient $\dfrac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)}$ tend toujours vers une limite qui pourrait être aussi ∞.

Désignons les itérées de la fonction conjuguée $\Psi(x)$ par $\Psi_n(x)$, de sorte qu'on ait

$$\Psi_1(x) = \Psi(x), \quad \ldots, \quad \Psi_{n+1}(x) = \Psi(\Psi_n(x)) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Alors la *première assertion* d'Ermakof peut être énoncée comme suit:

Les fonctions conjuguées $\Psi_n(\mathrm{x})$ *et* $\Psi(\mathrm{x})$ *donnent une sensibilité identique pour les caractères de convergence et de divergence.*

Ce théorème est inexact. Au contraire, les fonctions itérées $\Psi_n(x)$ $(n > 1)$ donnent une sensibilité en général plus grande que $\Psi(x)$. En effet, on a évidemment

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \Psi'_n(x) = \frac{f(\Psi(\Psi_{n-1}(x)))}{f(\Psi_{n-1}(x))} \Psi'(\Psi_{n-1}(x)) \cdot \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)} \Psi'_{n-1}(x). \qquad \text{(VIII, 1)}$$

Il en résulte que si l'on a

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \Psi'(x) = q < 1$$

on aura

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \leqq q \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_{n-1}(x),$$

donc par récurrence

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \leqq q^n.$$

De même, si l'on a à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \Psi'(x) \geqq 1,$$

il résulte de (VIII, 1) qu'on aura aussi à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \geqq 1.$$

Nous allons maintenant donner un exemple d'une fonction $f(x)$ non croissante à partir d'un x et telle que le critère de convergence B d'Ermakof n'est pas applicable à la série $\Sigma f(\nu)$ pour $\Psi(x) = x^2$, mais devient applicable pour $\Psi_2(x) = x^4$.

A cet effet, formons une suite infinie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en posant

$$x_1 = 3\,, \quad x_2 = 4^4\,, \quad \ldots\,, \quad x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)\,.$$

Posons $f(x_1) = 1$ et

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2}\, lg\, x_\nu)\, x} \qquad \left(x_\nu < x < x_\nu^4\right),$$

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu}\, lg\, x_\nu\right) x} \qquad \left(x_\nu^4 \leqq x \leqq x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4\right).$$

Ces relations permettent évidemment de définir la valeur de $f(x)$ par voie de récurrence pour $x \geqq 3$. Il résulte de ces formules que la fonction $f(x)$ ainsi définie est continue, positive et non croissante dans chacun des intervalles (x_ν, x_ν^4), $\langle x_\nu^4, (1 + x_\nu)^4 \rangle$, tandis qu'en passant par le point $x = x_\nu^4$ sa valeur se trouve divisée par 8^ν et en passant par le point x_ν, par $8^{\nu^2} x_\nu\, lg\, x_\nu$.

Considérons le rapport $\dfrac{f(x^2)\, 2\, x}{f(x)}$ pour $x_\nu < x < 1 + x_\nu$; x^2 étant contenu dans l'intervalle (x_ν, x_ν^4), il résulte évidemment

$$\frac{f(x^2)\, 2\, x}{f(x)} = \frac{x \cdot 2\, x}{x^2} = 2\,.$$

On a donc, en posant $\Psi(x) \equiv x^2$,

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\, \frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \geqq 2\,.$$

Pour $\Psi_2(x) = x^4$, on obtient

$$\frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = \frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)}\,.$$

Or, en premier lieu, si $x_\nu \leqq x \leqq 1 + x_\nu$, x^4 est située dans l'intervalle $\langle x_\nu^4, x_{\nu+1} \rangle$. On aura donc

$$f(x^4) = \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu}\, lg\, x_\nu\right) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} \leqq \frac{x \cdot 4\, x^3}{8^\nu\, x^4} = \frac{4}{8^\nu} \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow \infty, \quad x_\nu \leqq x \leqq 1 + x_\nu)\,.$$

En second lieu, si $1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}$, x^4 sera situé dans l'intervalle $(x_{\nu+1}, x_{\nu+1}^4)$ de sorte qu'on aura

$$f(x^4) = \frac{f(x_{\nu+1})}{\left(8^{(\nu+1)^2} \lg x_{\nu+1}\right) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} = \frac{4\, f(x_{\nu+1})}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}\right) x\, f(x)},$$

et, puisqu'on a en tout cas

$$f(x) \geqq \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu\right) x},$$

il vient

$$\frac{f(x^4)\, 4x^3}{f(x)} \leqq \frac{f(x_{\nu+1}) \left(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu\right) \cdot 4}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)} = \frac{f(x_{\nu+1}) \lg x_\nu}{\left(2 \cdot 8^\nu \lg x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)}.$$

Or, on a évidemment pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$\lg x_{\nu+1} \sim 4 \lg x_\nu \;, \qquad f(x_{\nu+1}) < f(x_\nu)\,,$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} \longrightarrow 0 \qquad \left(x \longrightarrow \infty, \quad 1 + x_\nu \; < x < x_{\nu+1}\right).$$

On a ainsi

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = 0\,,$$

et le critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi_2(x) = x^4$ est applicable à la série $\Sigma f(\nu)$.

IX. Les fonctions conjuguées auxquelles x + 1 est subordonné.

En second lieu Ermakof donne à l'endroit cité l'énoncé suivant:

« *De deux fonctions conjuguées de première espèce la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence.* »