

# X. Les fonctions conjuguées auxquelles $x^k$ est subordonné.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Alors on a pour tout entier positif  $n$ :

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}.$$

Or, soit  $n = [\Psi(x) - x]$ . On obtient

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \frac{f(x+n) \Psi'(x)}{f(x)} \leq e^\varepsilon e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x).$$

D'autre part, on a à partir d'un  $x$

$$\lg \Psi'(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x) - x], \quad \Psi'(x) \leq e^{\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]},$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

### X. Les fonctions conjuguées auxquelles $x^k$ est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que  $x^k$  ( $k > 1$ ) soit subordonné à la fonction conjuguée  $\Psi(x)$  pour chaque  $k$ :

Si la fonction conjuguée  $\Psi(x)$  satisfait aux deux conditions

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x) (\lg \Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0, \quad \frac{\lg x}{\lg \lg \Psi(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty) \quad (\text{X, 1})$$

pour chaque  $\delta > 0$ , la fonction conjuguée  $x^k$  est subordonnée à  $\Psi(x)$  pour chaque  $k > 1$ .

*Démonstration.* — On a à partir d'un  $x$

$$\frac{f(x^k) k x^{k-1}}{f(x)} \leq q = e^{-\varepsilon} < 1;$$

il en résulte pour chaque entier positif  $n$

$$\frac{f(x^{kn}) k^n x^{kn}}{x f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}. \quad (\text{X, 2})$$

Or, choisissons l'entier  $n$  en fonction de  $x$  de façon que l'on ait

$$x^{kn+1} > \Psi(x) \geq x^{kn}. \quad (\text{X, 3})$$

On a alors,  $\Psi'(x)$  étant continue, pour un certain  $\bar{x}$

$$\Psi'(x) = \bar{x}^{k^n},$$

où évidemment

$$x \leq \bar{x} < x^k. \tag{X, 4}$$

En appliquant (X, 2) à  $\bar{x}$ , on aura donc

$$\frac{f(\Psi'(x)) k^n \Psi'(x)}{\bar{x} f(\bar{x})} \leq e^{-\varepsilon n},$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} \frac{f(\bar{x})}{f(x)} \frac{\Psi''(x)}{\Psi'(x)} \frac{1}{k^n}. \tag{X, 5}$$

Or,  $\bar{x}$  étant  $\geq x$  d'après (X, 4) on aura  $f(\bar{x})/f(x) \leq 1$ . D'autre part, il résulte de (X, 3)

$$k^{n+1} > \frac{\lg \Psi'(x)}{\lg x}, \tag{X, 6}$$

donc

$$\frac{1}{k^n} < k \frac{\lg x}{\lg \Psi'(x)}.$$

On obtient donc en introduisant cette borne dans l'expression de droite de (X, 5) et en remplaçant  $\bar{x}$  par sa borne supérieure  $x^k$ :

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} k x^k \frac{\lg x}{\lg \Psi'(x)} \frac{\Psi''(x)}{\Psi'(x)}. \tag{X, 7}$$

On a à partir d'un  $x$  par hypothèse

$$\Psi''(x) \leq \Psi'(x) (\lg \Psi'(x))^{1+\delta},$$

avec

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \lg k}, \tag{X, 8}$$

donc, en vertu de (X, 7)

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} k x^k \lg x (\lg \Psi'(x))^\delta. \tag{X, 9}$$

D'autre part, on a d'après (X, 6)

$$n > \frac{\lg \frac{\lg \Psi'(x)}{\lg x}}{\lg k} - 1,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leq e^{\varepsilon} \left( \frac{\lg \Psi'(x)}{\lg x} \right)^{-\frac{\varepsilon}{\lg k}},$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leq e^{\varepsilon} \left( \frac{\lg x}{\lg \Psi'(x)} \right)^{2\delta}.$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq k e^{\varepsilon} x^k \frac{(\lg x)^{1+2\delta}}{(\lg \Psi'(x))^{\delta}}. \quad (\text{X, 10})$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un  $x$ :

$$\delta \lg \lg \Psi'(x) > (k+1) \lg x, \quad (\lg \Psi'(x))^{\delta} > x^{k+1}.$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un  $x$

$$\leq k e^{\varepsilon} \frac{(\lg x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec  $x \rightarrow \infty$ .  $x^k$  est donc bien subordonné à  $\Psi'(x)$ .

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi'(x) = e^{e^x}, \quad \Psi'(x) = e^{e^{e^x}}, \quad \Psi'(x) = e^{e^{(\lg x)^2}}.$$

## XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

$\alpha$ ) Soient  $\Psi'(x)$  et  $\psi(x)$  deux fonctions positives, continues et dérivables pour  $0 < x_0 \leq x < \infty$  et telles que l'on ait

$$\Psi'(x) \longrightarrow \infty, \quad \psi(x) \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty)$$