

# L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS

Autor(en): **Braconnier, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32889>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS

*Première partie*

PAR

Jean BRACONNIER, Lyon

---

## INTRODUCTION.

On sait que l'étude de la représentation des fonctions au moyen de séries trigonométriques ou d'intégrales de Fourier constitue un chapitre essentiel de l'analyse fonctionnelle. Les premiers résultats relatifs à ce qu'on appelle aujourd'hui la transformation de Fourier furent énoncés au début du XIX<sup>e</sup> siècle par L. Fourier, S. Poisson, A. Cauchy et P.-L. Dirichlet en vue de résoudre des problèmes soulevés par D. Bernoulli, L. Euler et J. d'Alembert dans leurs travaux sur les solutions des équations différentielles. La période de 1825 à 1925 vit paraître une immense littérature consacrée aux séries et intégrales de Fourier et il ne saurait être question de donner ici des indications bibliographiques à ce sujet; quant aux résultats obtenus, on pourra se reporter aux traités et monographies classiques parmi lesquels on peut citer, sans être exclusif, les ouvrages de A. Zygmund [35]<sup>1</sup>, S. Bochner [2] et N. Wiener [34].

L'étude moderne des structures fondamentales de l'analyse qui commençait à se développer vers 1925 se devait d'opérer une synthèse de la théorie ainsi édifiée en reconstruisant l'analyse harmonique à partir de quelques principes généraux, en

---

<sup>1</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.



élucidant le caractère mystérieux de certains résultats et en établissant entre eux des liens jusqu'alors peu visibles ou inconnus. Les progrès de la théorie des groupes topologiques et les travaux de H. Weyl, L. Pontrjagin et J. von Neumann indiquaient la voie à suivre et, en 1940, dans son magistral traité [33], A. Weil pouvait dire que « les groupes abéliens, localement compacts, forment le domaine naturel de l'analyse harmonique », définir la transformation de Fourier dans ces groupes et démontrer des généralisations du théorème d'inversion de Fourier, du théorème de Parseval-Plancherel et du théorème de Hergoltz-Bochner. Un peu plus tard, I. Gelfand et D. A. Raïkov [10] démontraient les mêmes résultats en suivant une voie un peu différente; enfin, en 1945, des versions probablement définitives et d'ailleurs très proches l'une de l'autre, furent publiées, d'une part, par H. Cartan et R. Godement [7] et par D. A. Raïkov [26], d'autre part. Les monographies et traités publiés depuis ne font que reprendre et compléter les idées fondamentales exposées par les auteurs qu'on vient de nommer; parmi eux, outre les travaux qu'on vient d'indiquer, il faut signaler les articles et monographies de G. W. Mackey [21], M. H. Stone [32] et L. H. Loomis [19]. L'analyse harmonique apparaît alors comme l'étude de la réalisation, au moyen de la transformation de Fourier, de l'algèbre d'un groupe (algèbre qui, à volonté, peut être formée de fonctions, de mesures, voire de distributions, définies dans le groupe) comme une algèbre de fonctions numériques, ou de mesures, définies dans un objet dual du groupe, et qui est en quelque sorte le spectre de son algèbre. Les résultats qu'on obtient ainsi font l'objet du présent article; une partie de ces résultats s'étend, au prix d'assez grandes difficultés, aux groupes non abéliens que nous n'examinerons pas ici.

On s'est efforcé de décrire les résultats avec la plus grande précision, ce qui a conduit parfois à quelque lourdeur, dont le lecteur voudra bien nous excuser. D'autre part, chaque fois que cela a semblé utile, on a donné de brèves indications sur les démonstrations. Enfin, afin de conserver l'aspect concret du sujet, on a volontairement évité l'emploi systématique de la théorie des algèbres normées, qui s'avèrerait indispensable dans un exposé plus dogmatique que celui-ci.

Dans le paragraphe 1, on trouvera un rappel de notions fondamentales, relatives aux mesures et intégrales et aux algèbres normées. Au paragraphe 2, on donne la définition et quelques propriétés de l'intégrale de Haar dans un groupe localement compact  $G$ , de l'algèbre de  $G$  et des fonctions de type positif dans  $G$ , qui permettent de construire les formes positives, continues dans l'algèbre de  $G$ . Au paragraphe 3 sont définis les caractères du groupe  $G$ , supposé abélien, et ceux de son algèbre. Dans le paragraphe 4, on trouvera la définition de la transformation de Fourier ainsi que ses propriétés fondamentales. Au paragraphe 5 se trouve exposée la théorie de la dualité dans les groupes abéliens et au paragraphe 6 l'essentiel de la théorie spectrale des fonctions mesurables et bornées.

Dans la seconde partie, qui débute avec le paragraphe 7, on trouvera des compléments relatifs à la transformation de Fourier-Laplace et à la théorie spectrale des fonctions continues. Enfin, au paragraphe 8, on expose quelques propriétés fondamentales des représentations des groupes et des rapports étroits qui existent entre ces représentations et la transformation de Fourier. Enfin, cet article est complété d'une bibliographie volontairement limitée aux travaux essentiels cités dans le texte.

## § 1. Préliminaires.

1. Nous allons d'abord rappeler quelques définitions relatives aux intégrales, dont il sera fait un constant usage dans la suite<sup>1</sup>. Soit  $E$  un espace localement compact. On appelle *support* d'une fonction  $f$  à valeurs complexes, définie dans  $E$  le plus petit ensemble fermé de  $E$  en dehors duquel  $f$  s'annule; on désigne par  $\mathcal{K}(E)$  l'espace vectoriel sur le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes, que forme, lorsqu'on le munit des opérations usuelles sur les fonctions numériques, l'ensemble des fonctions complexes, définies et continues dans  $E$ , dont le support est compact. On

<sup>1</sup> On utilisera ici la théorie de l'intégration telle qu'elle est exposée par N. BOURBAKI [5]; cette théorie est, entre autres, particulièrement adaptée à notre propos. Pour les éléments de topologie générale et de théorie des espaces vectoriels topologiques, on consultera [3] et [4].

désigne par  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  l'espace vectoriel formé des fonctions complexes  $f$ , continues dans  $E$  et nulles à l'infini, c'est-à-dire telles que, pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble compact  $K \subset E$  tel que l'on ait  $|f(x)| \leq \varepsilon$  si  $x$  n'appartient pas à  $K$ .  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  sera toujours muni de la norme  $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ ;  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  est alors un espace de BANACH dans lequel  $\mathcal{K}(E)$  est partout dense.

Désignons par  $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{K}(E)$  à valeurs réelles;  $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$  est un espace vectoriel sur le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels. On appelle *mesure de RADON* dans  $E$  une forme linéaire  $f \rightarrow \mu(f)$  sur  $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$  telle que, pour tout ensemble compact  $K \subset E$ , il existe un nombre  $c_K \geq 0$  tel que l'on ait  $|\mu(f)| \leq c_K \|f\|$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$  dont le support est contenu dans  $K$ . Une mesure  $\mu$  est dite positive si  $\mu(f) \geq 0$  pour toute fonction  $f \geq 0$  de  $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$ ; une telle mesure  $\mu$  se prolonge canoniquement en une forme linéaire sur un espace de fonctions intégrables (pour  $\mu$ ) et ce prolongement possède les propriétés des intégrales usuelles. Une forme linéaire complexe sur  $\mathcal{K}(E)$ , qui est combinaison linéaire (à coefficients complexes) de mesures de RADON s'appelle une *mesure de RADON complexe*; toutes les mesures considérées dans la suite seront de cette espèce. Si  $\mu$  est une mesure, on désignera souvent par  $\int f(x) d\mu(x)$  ou  $\int f d\mu$  sa valeur pour une fonction  $f \in \mathcal{K}(E)$  et on désignera par  $\mathcal{M}(E)$  l'espace vectoriel formé par les mesures sur  $E$ .

Toute forme linéaire  $\mu$  continue dans l'espace  $\mathcal{K}(E)$  muni de la norme  $\|f\|$  est évidemment une mesure dans  $E$ , mesure qu'on dit *bornée*;  $\mu$  se prolonge alors par continuité en une forme linéaire continue dans l'espace de BANACH  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  qui sera encore notée  $\mu$ . On peut ainsi identifier l'espace  $\mathcal{M}^1(E)$  formé des mesures bornées dans  $E$  au dual de l'espace  $\overline{\mathcal{K}(E)}$ , la norme d'une mesure bornée  $\mu$  étant  $\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\mu(f)|$ .

On appelle *support* d'une mesure  $\mu$  dans  $E$  le plus petit ensemble fermé  $F \in E$  tel que  $\int f d\mu = 0$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$  dont le support ne rencontre pas  $F$ . Toute mesure à support compact est une forme linéaire continue dans l'espace vectoriel  $\mathcal{K}(E)$  lorsqu'on munit cet espace de la topologie de

convergence compacte; comme  $\mathcal{K}(E)$  est partout dense dans l'espace  $\mathcal{C}(E)$  des fonctions complexes continues dans  $E$ , muni de la topologie de convergence compacte, toute mesure dans  $E$  dont le support est compact se prolonge par continuité en une forme linéaire continue dans  $\mathcal{C}(E)$  et on identifiera l'espace  $\mathcal{M}_c(E)$  des mesures à support compact au dual de  $\mathcal{C}(E)$ . Remarquons enfin qu'une mesure à support compact est évidemment bornée.

Si  $x \in E$ , on désigne par  $\varepsilon_x$  la mesure  $f \rightarrow f(x)$ ; son support est le point  $x$ ; de plus  $x \rightarrow \varepsilon_x$  est un homéomorphisme de  $E$  dans chacun des espaces  $\mathcal{M}^1(E)$  ou  $\mathcal{M}_c(E)$  muni de la topologie faible. La mesure  $\sum_{i=1}^n c_i \varepsilon_{x_i}$ , où les  $c_i$  sont des nombres complexes et les  $x_i$  des points de  $E$  ( $1 \leq i \leq n$ ), est dite *définie par les masses  $c_i$  placées aux points  $x_i \in E$* .

2. Nous allons maintenant rappeler quelques définitions moins classiques, relatives aux *algèbres*. Toutes les algèbres que l'on considérera sont des algèbres sur le corps des nombres complexes; une telle algèbre  $A$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$ , muni d'un produit  $(x, y) \rightarrow xy$ , associatif et distributif par rapport à l'addition, et tel que  $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$  quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $A$  et le nombre complexe  $\lambda$ . Un idéal bilatère  $\mathfrak{a}$  de  $A$  est dit *régulier* si l'algèbre quotient  $A/\mathfrak{a}$  possède une unité. Une représentation  $f$  d'une algèbre  $A$  dans une algèbre  $A_1$  est une application linéaire de  $A$  dans  $A_1$  telle que l'on ait  $f(xy) = f(x)f(y)$  quels que soient  $x \in A$  et  $y \in A$ . Une représentation de  $A$  sur  $\mathbf{C}$  s'appelle un *caractère* de  $A$ ; le noyau  $\chi^{-1}(0)$  d'un caractère  $\chi$  de  $A$  est un idéal bilatère régulier maximal de  $A$ .

On dit que  $A$  est une *algèbre involutive* si  $A$  est une algèbre pourvue d'une application  $x \rightarrow x^*$  de  $A$  dans elle-même, appelée *involution*, et telle que  $(x+y)^* = x^* + y^*$ ,  $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$ ,  $(xy)^* = y^*x^*$  et  $x^{**} = x$  quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $A$  et le nombre complexe  $\lambda$ . Une représentation  $f$  d'une algèbre involutive  $A$  dans une algèbre involutive  $A_1$  est une représentation de l'algèbre  $A$  dans l'algèbre  $A_1$  telle que  $f(x^*) = f(x)^*$  quel que soit  $x \in A$ . Un caractère  $\chi$  d'une algèbre

involutive  $A$  est dit *unitaire* si l'on a  $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$  pour tout  $x \in A$ . Une forme linéaire  $f$  sur  $A$  est dite *positive* si l'on a  $f(x^*x) \geq 0$  et  $f(x^*) = \overline{f(x)}$  pour tout  $x \in A$ . Par exemple, si  $E$  est un espace localement compact,  $\mathcal{K}(E)$ , muni des opérations usuelles et de l'involution  $f \rightarrow \overline{f}$  est une algèbre involutive; toute mesure positive dans  $E$  est une forme linéaire positive dans  $\mathcal{K}(E)$ ; si  $x \in E$ , la mesure  $\varepsilon_x$  est un caractère unitaire de  $\mathcal{K}(E)$ .

On dit qu'une algèbre  $A$  est une algèbre *normée* si  $A$  est un espace vectoriel normé par une norme  $x \rightarrow \|x\|$  telle que  $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  quels que soient  $x \in A$  et  $y \in A$ . Toute algèbre normée qui est un corps est isomorphe à  $\mathbf{C}$  (théorème de GELFAND-MAZUR<sup>1</sup>). Si  $A$  est complète et si  $\mathfrak{a}$  est un idéal régulier distinct de  $A$ , il en est de même de l'adhérence de  $\mathfrak{a}$ ; tout idéal régulier maximal de  $A$  est ainsi fermé; si de plus  $A$  est commutative, le théorème de GELFAND-MAZUR montre que tout idéal régulier maximal est le noyau d'un caractère bien déterminé de  $A$ . On appelle *approximation de l'unité* dans  $A$  une base de filtre  $\mathfrak{F}$  dans  $A$  telle que chacun des ensembles de  $\mathfrak{F}$  soit formé d'éléments  $y \in A$  tels que  $\|y\| = 1$  et que l'on ait  $\lim_{\mathfrak{F}} xy = x$  pour tout  $x \in A$ ; si  $A$  possède une unité  $e$ , la base de filtre réduite à  $\{e\}$  est évidemment une approximation de l'unité. Si  $E$  est un espace localement compact,  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  muni des opérations usuelles sur les fonctions numériques et de la norme introduite au n° 1 est une algèbre involutive, normée et complète (et évidemment commutative); si  $K$  est un ensemble compact de  $E$ , les fonctions positives de  $\overline{\mathcal{K}(E)}$ , égales à 1 dans  $K$  et  $\leq 1$  ailleurs, forment un ensemble  $B_K$ ; lorsque  $K$  varie,  $B_K$  décrit une approximation de l'unité dans  $\overline{\mathcal{K}(E)}$ ; on remarquera que  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  ne possède d'unité que dans le seul cas où  $E$  est compact. Tout caractère continu de  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  est une mesure de la forme  $\varepsilon_x$  où  $x \in E$ ; tout idéal régulier maximal de  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  est donc formé des fonctions qui s'annulent en un point bien déterminé de  $E$ . Plus généralement, si  $F$  est un ensemble fermé de  $E$ , l'ensemble  $N(F)$  des fonctions  $f \in \overline{\mathcal{K}(E)}$  telles que  $f(x) = 0$  si  $x \in F$  est un idéal fermé de  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  (régulier dans le seul cas où  $F$  est compact); tout idéal fermé de  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  est de cette forme. Soit  $A$  une algèbre

<sup>1</sup> Cf. par exemple [8], [12] et aussi E. HILLE, Functional analysis and semi-groups, § 22-12, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XXXI (1948).

commutative normée et  $\sigma$  l'ensemble des caractères continus de  $A$ ;  $\sigma$  muni de la topologie faible (du dual de  $A$ ) est un espace localement compact (et compact si  $A$  possède une unité) qu'on appelle le *spectre* de  $A$ ; si  $x \in A$ ,  $\chi \rightarrow \chi(x)$  est une fonction  $\hat{x} \in \overline{\mathcal{K}(\sigma)}$  et  $x \rightarrow \hat{x}$  est une représentation continue de  $A$  dans l'algèbre normée  $\overline{\mathcal{K}(\sigma)}$ . Supposons maintenant  $A$  complète; on a  $\|\hat{x}\| = \sup_x |\chi(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}$ ; de plus, le noyau de  $x \rightarrow \hat{x}$  est l'intersection des idéaux réguliers maximaux de  $A$  ou, comme on dit, le *radical* de  $A$ ; on dit que  $A$  est *semi-simple* si ce radical se réduit à 0, c'est-à-dire si  $x \rightarrow \hat{x}$  est biunivoque, ou si  $A$  est séparée par ses caractères. Si  $E$  est un espace localement compact,  $E$  s'identifie au spectre de  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  au moyen de  $x \rightarrow \varepsilon_x$  et  $f \rightarrow \hat{f}$  est simplement l'application identique de  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  sur lui-même.

On dit enfin qu'une algèbre normée  $A$  est une algèbre *involutive normée* si  $A$  est munie d'une involution  $x \rightarrow x^*$  telle que  $\|x^*\| = \|x\|$  pour tout  $x \in A$ . Si  $A$  est une algèbre involutive complète, tout caractère unitaire de  $A$  est continu; inversement, si tout caractère continu est unitaire, on dit que  $A$  est une algèbre *symétrique*.

Si  $E$  est un espace localement compact,  $\overline{\mathcal{K}(E)}$ , munie de l'involution  $f \rightarrow \bar{f}$ , est une algèbre symétrique; on remarquera que les formes linéaires positives et continues dans  $\overline{\mathcal{K}(E)}$  sont simplement les mesures bornées et positives dans  $E$ . Si  $A$  est une algèbre symétrique commutative et si  $\sigma$  est son spectre,  $x \rightarrow \hat{x}$  est une représentation continue de  $A$  sur une sous-algèbre *partout dense* de l'algèbre involutive  $\overline{\mathcal{K}(\sigma)}$ , d'après le théorème de WEIERSTRASS-STONE<sup>1</sup>; si  $\mu$  est une mesure positive et bornée dans  $\sigma$ ,  $f(x) = \int \hat{x} d\mu$  est une forme linéaire positive et continue dans  $A$  qui satisfait à  $|f(x)|^2 \leq \|\mu\| f(x^*x)$ ; réciproquement, toute forme linéaire positive  $f$  dans  $A$  qui satisfait à  $|f(x)|^2 \leq k f(x^*x)$  pour tout  $x \in A$  (condition qui est satisfaite lorsque  $f$  est continue et lorsque  $A$  possède une approximation de l'unité) est de la forme ci-dessus; mais c'est déjà là faire de l'analyse harmonique, puisque celle-ci n'est autre que l'étude

<sup>1</sup> Cf. [3], § 13, n° 23.



de la transformation de FOURIER  $x \rightarrow \hat{x}$  lorsque  $A$  est une algèbre de groupe.

Pour de plus amples renseignements sur la théorie des algèbres normées, on pourra consulter le magistral exposé de M. NEUMARK [23] et aussi [8, 11, 14].

## § 2. L'intégrale de Haar et le produit de composition.

Dans tout ce qui suit, on désignera par  $G$  un groupe topologique localement compact; la loi de composition de  $G$  sera notée multiplicativement et l'élément neutre de  $G$  sera désigné par  $e$ . Toutes les fonctions définies dans  $G$  que l'on considère prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\mathbf{C}$  des nombres complexes, sauf mention expresse du contraire.

1. Soit  $f$  une fonction définie dans  $G$ ; si  $s \in G$ , la fonction  $x \rightarrow f(s^{-1}x)$  s'appelle la *translatée* (à gauche) de  $f$  par  $s$  et se note  $U_s \cdot f$ ; les éléments  $s \in G$  tels que  $U_s \cdot f = f$  s'appellent les *périodes* de  $f$  et forment un sous-groupe de  $G$ , fermé si  $f$  est continue; le support de  $U_s \cdot f$  est l'image du support de  $f$  par  $x \rightarrow sx$ . Il en résulte que  $U_s$  est un automorphisme de l'espace vectoriel  $\mathcal{K}(G)$ , ce qui permet de faire opérer  $G$  dans l'espace des mesures dans  $G$ : si  $s \in G$  est si  $\mu$  est une mesure dans  $G$ , on désigne par  $U_s \cdot \mu$  la mesure  $\nu$  définie par  $\nu(f) = \int f(sx) d\mu(x)$ , que l'on appelle la *translatée* (à gauche) de  $\mu$  par  $s$ . On montre qu'il existe une mesure sur  $G$ , positive et non nulle, invariante par toutes les translations (à gauche); cette mesure est, en outre, unique à un facteur multiplicatif près et s'appelle la *mesure de HAAR* dans  $G$ . On choisit une fois pour toutes cette mesure et on désigne alors par  $\int f(x) dx$  sa valeur pour  $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(G)$ ; on a ainsi  $\int f(sx) dx = \int f(x) dx$  et  $\int f(xs^{-1}) dx = \rho(s) \int f(x) dx$  pour tout  $s \in G$ , où  $\rho$  est une représentation continue de  $G$  dans le groupe multiplicatif des nombres réels  $> 0$ , égale à 1 si  $G$  est *abélien* ou *compact*. Le support de la mesure de HAAR est  $G$  tout entier et on identifiera toujours deux fonctions définies dans  $G$  qui sont égales presque partout pour la mesure de HAAR; si deux fonctions continues dans  $G$  sont égales presque partout, elles sont égales.

Si  $p$  est un nombre réel  $\geq 1$ , on désignera par  $L^p(G)$  l'espace des fonctions de  $p^{\text{ième}}$  puissance intégrable dans  $G$  pour la mesure de HAAR; cette mesure se prolonge en une forme linéaire dans  $L^1(G)$  et on désigne par  $\int f(x) dx$  la valeur de ce prolongement pour  $f \in L^1(G)$ ;  $L^p(G)$  est un espace de BANACH pour la norme  $N_p(f) = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$ . Si  $p > 1$ , le dual de  $L^p(G)$  est  $L^q(G)$  avec  $1/p + 1/q = 1$ : toute forme linéaire continue dans  $L^p(G)$  s'écrit en effet sous la forme

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1)$$

où  $f \in L^p(G)$  et  $g \in L^q(G)$ . En particulier,  $L^2(G)$  est un espace hilbertien si on le munit du produit scalaire défini par (1). Le dual de  $L^1(G)$  est l'espace  $L^\infty(G)$  des fonctions mesurables dans  $G$  et bornées en mesure de HAAR: toute forme linéaire continue dans  $L^1(G)$  est encore donnée par la formule (1) avec  $f \in L^1(G)$  et  $g \in L^\infty(G)$ ;  $N_\infty(g)$  désignera la borne supérieure en mesure de HAAR d'une fonction  $g \in L^\infty(G)$ ; on définit alors facilement la topologie faible dans  $L^\infty(G)$ , qui sera largement utilisée dans la suite.

Si  $1 \leq p \leq +\infty$ , et si  $f \in L^p(G)$ , on a  $U_s \cdot f \in L^p(G)$  et  $N_p(U_s \cdot f) = N_p(f)$ . Il en résulte que  $s \rightarrow U_s$  est une représentation biunivoque de  $G$  dans le groupe des automorphismes de  $L^p(G)$  et, si  $f \in L^p(G)$ ,  $s \rightarrow U_s \cdot f$  est une application continue de  $G$  dans  $L^p(G)$ . Si  $p$  est fini, le transposé de l'automorphisme  $U_s$  de  $L^p(G)$  est l'automorphisme  $U_{s^{-1}}$  de  $L^q(G)$  ( $1/p + 1/q = 1$ ). Enfin, par extension de la définition donnée ci-dessus, les éléments  $s$  de  $G$  tels que  $U_s \cdot f = f$  s'appellent les périodes de la fonction  $f \in L^p(G)$  et forment un sous-groupe fermé de  $G$ .

Si  $f \in L^1(G)$ , on désignera par  $\tilde{f}$  la fonction  $x \rightarrow \overline{f(x^{-1})}/\rho(x)$  de  $L^1(G)$ ; de plus on identifiera souvent  $f$  à la mesure  $\mu$  bornée dans  $G$ , définie par  $d\mu(x) = f(x) dx$ ; on a  $N_1(f) = \|\mu\|$ . Plus généralement, si  $\mu$  est une mesure dans  $G$ , on désignera par  $\tilde{\mu}$  la mesure définie par  $d\tilde{\mu}(x) = d\overline{\mu}(x^{-1})$  où  $\mu$  est la mesure conjuguée de  $\mu$ ; cette convention est évidemment compatible avec la précédente.

Pour que  $G$  soit compact, il faut et il suffit que la mesure de HAAR de  $G$  soit une mesure bornée; on choisit alors cette mesure



de façon que sa norme soit 1; pour toute fonction  $f$  continue dans  $G$ ,  $\int f(x) dx$  est alors la valeur moyenne de  $f$  dans  $G$ .

Si  $G$  est *discret*, la mesure de HAAR de  $G$  est évidemment définie par une masse constante, qu'on choisit le plus souvent égale à 1, placée en chaque point de  $G$ ;  $L^1(G)$  est alors l'ensemble des fonctions  $f$  telles que la famille de terme général  $f(x)$  soit *sommable* et on a  $\int f(x) dx = \sum_x f(x)$ . On a d'ailleurs  $L^1(G) = \mathcal{N}^1(G)$ .

La mesure de HAAR sur le groupe  $\mathbf{R}^n$  est la mesure de LEBESGUE usuelle. D'autre part, à toute fonction  $f$  continue sur le groupe compact  $\mathbf{T}$  des nombres réels modulo 1 correspond une fonction  $f^*$  définie sur  $\mathbf{R}$  et de période 1; l'intégrale de HAAR sur  $\mathbf{T}$  est alors définie par  $\int f(x) dx = \int_0^1 f^*(t) dt$ .

Soit enfin  $H$  un sous-groupe distingué et fermé de  $G$  et  $g \rightarrow \int_H g(y) dy$  (resp.  $h \rightarrow \int_{G/H} h(\dot{x}) d\dot{x}$ ) la mesure de HAAR de  $H$  (resp.  $G/H$ ); si  $f \in L^1(G)$ ,  $\dot{f}(\dot{x}) = \int_H f(xy) dy$  ne dépend que de la classe  $\dot{x}$  dans  $G/H$  de  $x \in G$  et  $\dot{f}$  est une fonction intégrable dans  $G/H$ ; on peut choisir (et on fera toujours ce choix) la mesure de HAAR dans  $G/H$  de façon que  $\int f(x) dx = \int_{G/H} \dot{f}(\dot{x}) d\dot{x}$  pour toute  $f \in L^1(G)$ .  $f \rightarrow \dot{f}$  est alors une représentation continue de  $L^1(G)$  sur  $L^1(G/H)$ , dont le noyau  $K(H)$  est formé des fonctions orthogonales aux fonctions de  $g \in L^\infty(G)$  telles que  $g(xy^{-1}) = g(x)$  pour tout  $y \in H$ .

2. Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures bornées dans  $G$ ; la formule

$$\lambda(f) = \int f(xy) d\mu(x) d\nu(y) \quad (f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(G)) \quad (1)$$

définit une mesure bornée  $\lambda$  dans  $G$  qu'on appelle le *produit de composition* de  $\mu$  et  $\nu$  et qu'on désigne par  $\mu * \nu$ . On a  $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$ . Muni du produit de composition et de l'involution  $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ , l'espace de BANACH  $\mathcal{N}^1(G)$  est une *algèbre normée involutive*. Remarquons maintenant que  $L^1(G)$ , identifié comme on l'a vu à une partie de  $\mathcal{N}^1(G)$ , est un *idéal* (bilatère) fermé de  $\mathcal{N}^1(G)$ , le produit de composition de  $\mu \in \mathcal{N}^1(G)$  et de

<sup>1</sup> Cf. [33, 27] et aussi H. REITER, *Monatshefte für Math.*, 58, 73-78 (1954), et les rectifications à cet article.

$f \in L^1(G)$  étant la fonction intégrable dans  $G$  définie presque partout par  $\mu \star f(x) = \int f(y^{-1}x) d\mu(y)$ ; on peut en particulier définir le produit de composition de deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $L^1(G)$  par la formule

$$f \star g(x) = \int f(y) g(y^{-1}x) dy. \quad (2)$$

Plus généralement on appellera *produit de composition* de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies dans  $G$  la fonction  $f \star g$  définie par (2) lorsque cette formule a un sens. On appelle *algèbre du groupe*  $G$  l'algèbre involutive normée et complète  $L^1(G)$ . Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{K}(G)$ , il en est de même de  $f \star g$ , de sorte que  $\mathcal{K}(G)$  est une sous-algèbre partout dense de  $L^1(G)$ , que certains auteurs appellent encore algèbre de  $G$  ( $\mathcal{K}(G)$  est, si l'on veut, l'« algèbre étroite » du groupe  $G$ ). Remarquons encore que l'ensemble  $\mathcal{M}_c(G)$  des mesures sur  $G$ , dont le support est compact, est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}^1(G)$ . Pour que l'une des algèbres que l'on vient de définir soit commutative, il faut et il suffit que  $G$  soit *abélien*; pour que  $L^1(G)$  ou  $\mathcal{K}(G)$  possède un élément unité (qui est alors  $\varepsilon_e$ ) il faut et il suffit que  $G$  soit *discret*. Remarquons enfin que, si  $H$  est un sous-groupe distingué fermé de  $G$ ,  $f \rightarrow \tilde{f}$  est une représentation de l'algèbre involutive  $L^1(G)$  sur  $L^1(G/H)$ .

Le produit de composition  $\mu \star f$  garde un sens si  $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$  et  $f \in L^p(G)$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) et on a alors  $\mu \star f \in L^p(G)$  et  $N_p(\mu \star f) \leq \|\mu\| N_p(f)$ . En particulier, on a  $N_p(f \star g) \leq N_1(f) N_p(g)$  si  $f \in L^1(G)$  et  $g \in L^p(G)$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ); on voit ainsi que  $g \rightarrow f \star g$  est un endomorphisme continu de  $L^p(G)$  et que l'application qui à  $f \in L^1(G)$  associe cet endomorphisme est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre  $L^1(G)$  dans l'algèbre des endomorphismes continus de  $L^p(G)$ ; le transposé de l'endomorphisme  $g \rightarrow f \star g$  de  $L^p(G)$  est l'endomorphisme  $g \rightarrow \tilde{f} \star g$  de  $L^q(G)$  ( $1/p + 1/q = 1$ ). Enfin  $L^p(G) \cap L^1(G)$  est un idéal à gauche partout dense de  $L^1(G)$ . D'autre part, pour qu'un sous-espace fermé de  $L^p(G)$  soit stable par toutes les translations  $U_s$  ( $s \in G$ ), il faut et il suffit qu'il soit stable par tous les endomorphismes  $g \rightarrow f \star g$  ( $f \in L^1(G)$ ); en particulier, *les idéaux à gauche fermés de  $L^1(G)$  sont identiques aux sous-espaces fermés de  $L^1(G)$ , stables par toutes les translations.*

Lorsque  $U$  parcourt l'ensemble des voisinages compacts de  $e$  dans  $G$ , l'ensemble des fonctions positives de  $\mathcal{K}(G)$ , dont le support est contenu dans  $U$  et dont l'intégrale de HAAR est 1, décrit une base de filtre  $\Phi(G)$  dans  $\mathcal{K}(G)$ . Pour toute fonction  $g \in L^p(G)$ , l'application  $f \rightarrow f \star g$  de  $\mathcal{K}(G)$  dans  $L^p(G)$  a  $g$  comme limite suivant la base de filtre  $\Phi(G)$  (*principe de régularisation*). En particulier,  $\Phi(G)$  est une *approximation de l'unité* dans  $L^1(G)$ . De même, si  $g$  est une fonction continue dans  $G$ ,  $f \star g$  converge uniformément sur tout compact de  $G$  vers  $g$  suivant la base de filtre  $\Phi(G)$ <sup>1</sup>.

Lorsque le groupe  $G$  est *compact*, on a  $L^p(G) \subset L^1(G)$  et  $N_1(f) \leq N_p(f)$  si  $p \geq 1$  et  $f \in L^p(G)$ ; en particulier  $L^2(G)$  est un idéal bilatère de  $L^1(G)$  et on a  $N_2(f \star g) \leq N_2(f) N_2(g)$ .  $L^2(G)$ , muni du produit de composition et de l'involution  $f \rightarrow \tilde{f}$ , devient une algèbre normée involutive, dont la structure est liée à la structure d'espace hilbertien de  $L^2(G)$  par la formule  $\langle f \star g, h \rangle = \langle g, \tilde{f} \star h \rangle$ . C'est cette algèbre qui permet d'ailleurs d'étudier le plus facilement les groupes compacts.

3. On dit qu'une fonction  $\varphi$  continue dans  $G$  est de *type positif* si elle vérifie les inégalités

$$\sum_{i,j} c_j \bar{c}_i \varphi(x_j^{-1} x_i) \geq 0 \quad (3)$$

quels que soient les nombres complexes  $c_i$  et les éléments  $x_i$  de  $G$  ( $1 \leq i \leq n$ ). On désigne par  $\mathcal{P}(G)$  l'ensemble des fonctions continues de type positif. Toute fonction  $\varphi \in \mathcal{P}(G)$  est uniformément continue et bornée dans  $G$  et satisfait à  $\|\varphi\| = \varphi(e)$  et  $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$ . Il sera commode de considérer  $\mathcal{P}(G)$  comme une partie de  $L^\infty(G)$ ;  $\mathcal{P}(G)$  est d'ailleurs un cône convexe fermé de  $L^\infty(G)$ . De plus, le produit de deux fonctions de type positif est encore une fonction de type positif. Si  $\mu$  est la mesure discrète définie par les masses  $c_i$  aux points  $x_i$  de  $G$  ( $1 \leq i \leq n$ ), l'inégalité (3) s'écrit sous la forme

$$\tilde{\mu} \star \mu(\varphi) \geq 0. \quad (4)$$

<sup>1</sup> Cf. [12]. On remplace souvent, dans la pratique,  $\Phi(G)$  par une base de filtre plus fine, dont les ensembles sont constitués par des fonctions ayant des propriétés données, formant souvent un idéal de  $\mathcal{K}(G)$ .

On vérifie facilement que pour qu'une fonction continue  $\varphi$  soit de type positif, il faut et il suffit qu'elle vérifie (4) pour toute mesure à support compact, ou pour toute mesure  $\mu$  de la forme  $d\mu(x) = f dx$  ( $f \in \mathcal{K}(G)$ ), c'est-à-dire que l'on ait

$$\int \tilde{f} \star f(x) \overline{\varphi(x)} dx \geq 0 \quad (5)$$

si  $f \in \mathcal{K}(G)$ ; on a alors aussi (5) pour toute  $f \in L^1(G)$  (l'inégalité (5) signifie que la forme sesquilinéaire  $(f, g) \rightarrow \int \tilde{g} \star f(x) \overline{\varphi(x)} dx$  est hermitienne et positive; nous reviendrons sur ce point au paragraphe 8). Toute fonction  $\varphi \in \mathfrak{A}(G)$  définit au moyen de la formule  $P(f) = \langle f, \varphi \rangle$  une forme *linéaire positive et continue* dans l'algèbre  $L^1(G)$ . Réciproquement, toute fonction de  $L^\infty(G)$  qui définit une forme positive dans  $L^1(G)$  est presque partout égale à une fonction de  $\mathfrak{A}(G)$  à laquelle on l'identifie. Ceci reste évidemment exact si on substitue à l'algèbre  $L^1(G)$  l'algèbre  $\mathcal{K}(G)$ . On dira de même qu'une mesure  $\mu$  sur  $G$  est de *type positif* si on a  $\int \tilde{f} \star f(x) d\mu(x) \geq 0$  pour toute  $f \in \mathcal{K}(G)$ ;  $\mu$  est ainsi une forme linéaire positive (mais non continue) sur l'algèbre  $\mathcal{K}(G)$ .

On désignera par  $\mathfrak{V}(G)$  l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires de fonctions de  $\mathfrak{A}(G)$ ;  $\mathfrak{V}(G)$  est une algèbre normée (mais non complète) avec le produit usuel des fonctions et la norme  $N_\infty(\varphi) = \|\varphi\|$ . On désignera par  $\mathfrak{V}^p(G)$  le sous-espace  $L^p(G) \cap \mathfrak{V}(G)$  de  $L^p(G)$  ( $1 \leq p < +\infty$ );  $\mathfrak{V}^1(G)$  est contenu dans tous les  $\mathfrak{V}^p(G)$ .

Si  $f \in L^1(G)$ ,  $\tilde{f} \star f$  appartient à  $\mathfrak{A}(G)$ ; il en résulte que les fonctions  $\tilde{g} \star f$  ( $g$  et  $f$  étant dans  $L^1(G)$ ) appartiennent à  $\mathfrak{V}^1(G)$ . Ces fonctions forment un idéal partout dense de  $L^1(G)$ . Plus généralement les fonctions  $\tilde{g} \star f$  sont partout denses dans  $L^p(G)$ , de telle sorte que  $\mathfrak{V}^1(G)$  et  $\mathfrak{V}^p(G)$  sont partout denses dans  $L^p(G)$ . Il n'est peut-être pas inutile de signaler que les fonctions de type positif vont jouer un rôle considérable dans notre propos.

Pour tout ce qui est dit dans ce paragraphe, et pour de plus amples informations, le lecteur se reportera au traité de A. WEIL [33] (cf. aussi [12]).

### § 3. Caractères d'un groupe abélien.

Dans tout ce qui suit, on supposera que le groupe  $G$  que l'on considère est abélien.

1. Une représentation continue de  $G$  dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue 1 s'appelle un *caractère* de  $G$ . On désignera par  $\hat{G}$  l'ensemble des caractères de  $G$ .  $\hat{G}$  est ainsi une partie de  $L^\infty(G)$  et, comme l'ensemble  $\hat{G} \cup \{0\}$  de  $L^\infty(G)$  est faiblement compact,  $\hat{G}$  est localement compact pour la topologie faible de  $L^\infty(G)$ ; en outre, on voit facilement que, dans  $\hat{G}$ , cette topologie coïncide avec la topologie de convergence compacte dans  $G$ . Enfin, il est clair que, si  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont des caractères de  $G$ , il en est de même de  $\hat{x}\hat{y}$  et que, muni de la loi de composition  $(\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow \hat{x}\hat{y}$  et de la topologie décrite ci-dessus,  $\hat{G}$  est un groupe abélien localement compact, que l'on nomme *dual* de  $G$ . Remarquons que, si  $x \in G$ ,  $\hat{x} \rightarrow \overline{\hat{x}}(x)$  est un caractère  $x'$  de  $\hat{G}$ ; on verra au paragraphe 4, n° 4, que  $x \rightarrow x'$  est un isomorphisme de  $G$  sur le dual du groupe  $\hat{G}$ . Les groupes  $G$  et  $\hat{G}$  vont jouer des rôles symétriques et il sera commode de désigner par  $\langle x, \hat{x} \rangle$  la valeur que prend au point  $x \in G$  le caractère  $\hat{x} \in \hat{G}$ .

Par exemple, tout caractère du groupe additif  $\mathbf{R}^n$  est de la forme  $\mathbf{x} \rightarrow \exp(2i\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$  où  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  est le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbf{R}^n$ ; on voit ainsi qu'on peut identifier le dual de  $\mathbf{R}^n$  à  $\mathbf{R}^n$  lui-même en posant  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \exp(2i\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ . De même tout caractère du groupe additif  $\mathbf{T}$  des nombres réels modulo 1 est de la forme  $x \rightarrow \exp(2i\pi nx')$  où  $n$  est un entier rationnel et où  $x'$  est un représentant dans  $\mathbf{R}$  de  $x \in \mathbf{T}$ ; on peut ainsi identifier le dual de  $\mathbf{T}$  au groupe additif  $\mathbf{Z}$  des entiers rationnels en posant  $\langle x, n \rangle = \exp(2i\pi nx')$ . On voit d'ailleurs facilement que le dual de  $\mathbf{Z}$  s'identifie à  $\mathbf{T}$  en posant  $\langle n, x \rangle = \overline{\langle x, n \rangle}$ . Ces identifications sont bien entendu compatibles avec les topologies des différents groupes considérés.

Pour tout  $\hat{x} \in \hat{G}$ , la formule

$$\chi_{\hat{x}}(f) = \int f(x) \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} dx \quad (f \in L^1(G)) \quad (1)$$

définit un caractère continu de l'algèbre involutive normée  $L^1(G)$ ; réciproquement, on montre facilement [10, 13] que tout caractère continu de  $L^1(G)$  est défini par la formule  $\chi(f) = \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$  où  $\varphi$  est une fonction de  $L^\infty(G)$  égale presque partout à un caractère de  $G$  auquel on l'identifie. On obtient ainsi une correspondance biunivoque  $\hat{x} \rightarrow \chi_{\hat{x}}$  entre  $\hat{G}$  et le spectre de  $L^1(G)$ , correspondance qui est naturellement un homéomorphisme. On notera que  $L^1(G)$  est ainsi une algèbre symétrique au sens du paragraphe 1, n° 2.

Le caractère de  $L^1(G)$  défini par la formule (1) se prolonge naturellement en un caractère continu de l'algèbre involutive normée  $\mathfrak{M}^1(G)$  au moyen de la formule  $\chi_{\hat{x}}(\mu) = \int \langle x, \hat{x} \rangle d\mu(x)$  (mais on n'obtient pas ainsi tous les caractères de  $\mathfrak{M}^1(G)$ ).

On démontre le résultat suivant, par un procédé dû à I. GELFAND et D. A. RAÏKOV [10, 26]: *l'algèbre  $L^1(G)$  est séparée par ses caractères* (i.e.  $L^1(G)$  est *semi-simple*): pour toute fonction  $f \neq 0$  de  $L^1(G)$ , il existe  $\hat{x} \in \hat{G}$  tel que  $\chi_{\hat{x}}(f) \neq 0$ . Ce résultat entraîne que  $G$  est séparé par ses caractères, c'est-à-dire que pour tout élément  $x \neq e$  de  $G$ , il existe  $\hat{x} \in \hat{G}$  tel que  $\langle x, \hat{x} \rangle \neq 1$ .

2. Il sera commode d'appeler *polynôme trigonométrique* dans  $G$  toute combinaison linéaire à coefficients complexes de caractères de  $G$ ; les exemples donnés au n° 1 montrent que cette définition est la définition usuelle des polynômes trigonométriques si  $G = \mathbf{T}$  ou  $G = \mathbf{R}$ . Dans le cas où  $G$  est compact, comme  $G$  est séparé par ses caractères, le théorème de WEIERSTRASS-STONE prouve immédiatement que l'on peut approcher uniformément toute fonction continue dans un groupe compact par des polynômes trigonométriques (i.e. que  $\hat{G}$  est un ensemble total dans  $\mathcal{C}(G)$ , muni de la topologie de convergence uniforme).

Tout caractère de  $G$  est évidemment une fonction de type positif dans  $G$ ; par suite tout polynôme trigonométrique appartient à  $\mathfrak{P}(G)$ .

De plus, on montre facilement que  $\hat{G}$  est l'ensemble des points extrémaux distincts de 0 de l'ensemble convexe  $\mathfrak{P}_0(G)$  formé des fonctions  $\varphi$  de type positif telles que  $\varphi(e) = \sup |\varphi(x)| \leq 1$ . Comme  $\mathfrak{P}_0(G)$  est faiblement compact, le théorème de KREIN-MILMAN<sup>1</sup> permet alors d'énoncer le théorème d'approximation

<sup>1</sup> Cf. [4], Ch. II, § 4, n° 2.



suisant: toute fonction  $\varphi \in \mathfrak{R}(G)$  peut être faiblement approchée (dans  $L^\infty(G)$ ) par des polynômes trigonométriques à coefficients positifs, coefficients dont la somme est égale à  $\varphi(e)$  [7, 12]; ce résultat se complète d'ailleurs facilement de la façon suivante: toute fonction de  $\mathfrak{C}(G)$  peut être approchée uniformément sur tout compact par des polynômes trigonométriques; il en est par suite de même pour toute fonction continue dans  $G$ . On verra au paragraphe 4, n° 3, d'importants compléments à ces résultats.

#### § 4. La transformation de Fourier.

1. Il est maintenant facile de définir la *transformée de FOURIER* d'une fonction  $f \in L^1(G)$ : c'est la fonction  $\hat{f}$  définie dans  $\hat{G}$  par la formule  $\hat{f}(\hat{x}) = \chi_{\hat{x}}(f)$ ; autrement dit, on pose

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} f(x) dx; \quad (1)$$

$\hat{f}$  est alors une fonction continue et nulle à l'infini dans  $\hat{G}$  en vertu de la définition de la topologie de  $\hat{G}$  (généralisation du classique théorème de RIEMANN-LEBESGUE). Plus précisément, on voit facilement, d'après la formule (1), que la *transformation de FOURIER*  $f \rightarrow \hat{f}$  est une *représentation continue de l'algèbre involutive normée*  $L^1(G)$  sur une sous-algèbre  $\mathfrak{A}(\hat{G})$  de  $\mathfrak{K}(\hat{G})$ .

Le fait que  $G$  est séparé par ses caractères signifie alors que  $f \rightarrow \hat{f}$  est *biunivoque* (c'est-à-dire que toute fonction intégrable est déterminée par sa transformée de FOURIER). La définition (1) montre de plus que les fonctions de  $\mathfrak{A}(\hat{G})$  séparent  $\hat{G}$ ; le théorème de WEIERSTRASS-STONE prouve alors que  $\mathfrak{A}(\hat{G})$  est *partout dense dans*  $\mathfrak{K}(\hat{G})$ , c'est-à-dire que l'on peut approcher uniformément toute fonction continue, nulle à l'infini, dans  $\hat{G}$  par des transformées de FOURIER de fonctions de  $L^1(G)$ .

La définition de la transformation de FOURIER s'étend naturellement à  $\mathfrak{M}^1(G)$ : la *transformée de FOURIER* de  $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$  est la fonction  $F_\mu$  continue et bornée dans  $\hat{G}$  définie par

$$F_\mu(\hat{x}) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} d\mu(x). \quad (2)$$

On voit encore facilement que  $\mu \rightarrow F_\mu$  est une représentation continue  $F$  de l'algèbre involutive normée  $\mathcal{N}^1(G)$  sur une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions uniformément continues et bornées dans  $\hat{G}$ . Si la mesure  $\mu$  est *positive*, on voit immédiatement que  $F_\mu$  est une fonction de type positif, en sorte que  $F$  applique  $\mathcal{N}^1(G)$  dans  $\mathfrak{P}(\hat{G})$ .

Remarquons enfin que, si  $\mu \in \mathcal{N}^1(G)$  et  $\hat{x} \in \hat{G}$ ,  $\mu \star \hat{x}$  est le polynôme trigonométrique  $F_\mu(\hat{x}) \hat{x}$  et que la transformée de FOURIER de  $U_x \cdot \mu$  est la fonction  $\overline{\langle x, \hat{x} \rangle} F_\mu(\hat{x})$  de  $\hat{x}$ .

On peut naturellement définir par des formules analogues la transformation de FOURIER  $F'$  dans le groupe  $\hat{G}$  (en fait, la formule que l'on va lire n'est autre que la formule (2) écrite pour  $\hat{G}$  lorsqu'on aura pu identifier  $G$  au dual de  $\hat{G}$ ): la transformée de FOURIER de la mesure  $\mu' \in \mathcal{N}^1(\hat{G})$  est la fonction  $F'_\mu$  continue, bornée et définie dans  $G$  par la formule

$$F'_\mu(x) = \int \langle x, \hat{x} \rangle d\mu'(\hat{x}) \quad (3)$$

Comme  $f \rightarrow \hat{f}$  est une application linéaire continue de  $L^1(G)$  dans  $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$ , sa transposée est une application linéaire faiblement continue du dual  $\mathcal{N}^1(\hat{G})$  de  $\mathcal{K}(\hat{G})$  dans le dual  $L^\infty(G)$  de  $L^1(G)$ , application qui est liée à  $F'$  par la formule

$$\overline{\hat{f}(\hat{x})} d\mu'(\hat{x}) = \overline{f(x)} F'_\mu(x) dx. \quad (4)$$

Comme  $\mathcal{A}(\hat{G})$  est dense dans  $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$ , ceci montre que  $F'$  est *biunivoque*, et faiblement continue.

Les exemples indiqués au paragraphe 3, n° 1, permettent d'écrire des formules normalisées pour la transformation de FOURIER usuelle: la transformée de FOURIER d'une fonction  $f$  intégrable de période 1 (i.e. appartenant à  $L^1(\mathbf{T})$ ), est la suite de terme général  $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) \exp(-2i\pi nx) dx$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) qu'on appelle suite des *coefficients de FOURIER* de  $f$ . De même, la transformée de FOURIER de  $f \in L^1(\mathbf{Z})$  est la fonction  $\hat{f}(x) = \sum_n f(n) \exp(2i\pi nx)$  de période 1. La transformée de FOURIER d'une mesure  $\mu \in \mathcal{N}^1(\mathbf{R}^n)$  est l'intégrale de FOURIER  $F_\mu(\mathbf{y}) = \int \exp(-2i\pi \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) d\mu(\mathbf{x})$ .



2. Nous allons maintenant voir les propriétés fondamentales de la transformation de FOURIER. Tout d'abord, il est clair que la transformée de FOURIER d'une mesure positive et bornée dans  $\hat{G}$  est une fonction de type positif dans  $G$ . Réciproquement, si  $\varphi \in \mathcal{P}(G)$ , il existe une mesure positive (unique)  $\mu' \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$  telle que

$$\varphi(x) = \int \langle x, \hat{x} \rangle d\mu'(\hat{x}) \quad \text{pour tout } x \in G \quad (5)$$

(théorème de BOCHNER).

Ce résultat a été démontré par G. HERGOLTZ pour  $G = \mathbf{Z}$ , par S. BOCHNER [2] pour  $G = \mathbf{R}^n$  et par A. WEIL [33] pour  $G$  quelconque.

Nous pensons qu'il est intéressant de donner quelques indications sur la démonstration de cet important résultat. Si  $\varphi \in \mathcal{P}(G)$ , on montre, par un artifice dû à D. A. RAÏKOV [25, 26] que  $\hat{f} \rightarrow \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$  est une forme linéaire positive et continue dans  $\mathcal{A}(\hat{G})$ ; comme  $\mathcal{A}(\hat{G})$  est partout dense dans  $\mathcal{K}(\hat{G})$ , cette forme se prolonge par continuité en une mesure positive  $\mu' \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$  telle que l'on ait  $\int f(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int f(\hat{x}) d\mu'(\hat{x})$  pour toute  $f \in L^1(G)$ ; en développant le second membre, on voit que la mesure  $\langle x, \hat{x} \rangle d\mu'(\hat{x})$  égale  $\varphi(x) dx$  d'où le résultat (cf. la fin du n° 2 du paragraphe 1). Signalons aussi une autre démonstration due à H. CARTAN et R. GODEMENT [7]: comme la transformée de FOURIER de la masse 1 au point  $\hat{x} \in \hat{G}$  est le caractère  $\hat{x}$  de  $G$ , l'ensemble convexe et faiblement compact des mesures positives de norme  $\leq 1$  dans  $\hat{G}$  est appliqué biunivoquement, et par suite bicontinûment, sur un ensemble convexe et faiblement compact de  $\mathcal{P}(G)$ , qui contient 0 et  $\hat{G}$ ; cet ensemble est, d'après le théorème d'approximation cité au paragraphe 3, n° 2, égal à  $\mathcal{P}_0(G)$ , ce qui entraîne le théorème de BOCHNER.

Remarquons encore que, si  $\mu'$  est positive, on a  $\|\mu'\| = F'_{\mu'}(e)$  de telle sorte que  $F'$  est un homéomorphisme sur  $\mathcal{P}(G)$  de l'ensemble des mesures positives et bornées dans  $\hat{G}$ .

Il résulte du théorème de Bochner que  $F'$  est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre  $\mathcal{M}^1(\hat{G})$  sur l'algèbre  $\mathcal{P}(G)$ . Ceci permet de voir que, si  $G$  n'est pas compact, il existe des fonctions uniformément continues et bornées dans  $G$  qu'on ne peut pas approcher uniformément par des fonctions de  $\mathcal{P}(G)$ ; c'est par exemple le cas si  $G = \mathbf{R}^1$ .

<sup>1</sup> Cf. J. DIEUDONNÉ, Sur le produit de composition. *Comp. Math.*, 12, 17-34 (1954).

On peut de plus choisir la mesure de HAAR dans le groupe  $\hat{G}$  de façon que toute fonction  $f \in \mathfrak{R}^1(G)$  soit de la forme  $F'_{\mu'}$ , où  $\mu'$  est la mesure définie par  $d\mu'(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x}$  dans  $\hat{G}$ ; cela signifie que, la mesure de HAAR étant convenablement choisie dans  $\hat{G}$ ,  $F$  applique  $\mathfrak{R}^1(G)$  dans  $\mathfrak{R}^1(\hat{G})$  et que, dans  $\mathfrak{R}^1(\hat{G})$ , l'application réciproque de  $F$  est  $F'$  ou, en explicitant, que l'on a

$$f(x) = \int \hat{f}(\hat{x}) \langle x, \hat{x} \rangle d\hat{x} \quad \text{pour toute } f \in \mathfrak{R}^1(G) \quad (6)$$

(formule d'inversion de FOURIER).

La mesure de HAAR étant ainsi choisie dans  $\hat{G}$ ,  $F$  est de plus une isométrie du sous-espace  $L^1(G) \cap L^2(G)$  de  $L^2(G)$  sur  $\mathfrak{R}^2(\hat{G})$ , autrement dit, on a

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x} \quad \text{pour toute } f \in L^1(G) \cap L^2(G) \quad (7)$$

(théorème de PLANCHEREL-WEIL).

Cette isométrie se prolonge par continuité en un isomorphisme de l'espace hilbertien  $L^2(G)$  sur l'espace hilbertien  $L^2(\hat{G})$ , isomorphisme dont le réciproque, ou l'adjoint, est le prolongement à  $L^2(\hat{G})$  de la restriction de  $F'$  à  $L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ . Pour  $G = \mathbf{T}$ , ce résultat est le classique théorème de BESSEL-PARSEVAL-RIESZ; il est dû à M. PLANCHEREL pour  $G = \mathbf{R}$  et à A. WEIL [33] pour  $G$  quelconque (et indépendamment à M. KREIN [18]). Des démonstrations diverses ont été publiées par H. CARTAN et R. GODEMENT [7] et D. A. RAÏKOV [25, 26]. On peut en déduire la démonstration du théorème d'inversion de FOURIER. Signalons enfin qu'un théorème général sur la représentation des formes linéaires positives dans une algèbre involutive et commutative quelconque (théorème dû à R. GODEMENT [14] et s'inspirant de techniques utilisées par M. NEUMARK [9, 23] et analogues à celles utilisées par D. A. RAÏKOV) permet de démontrer d'un seul coup le théorème de BOCHNER, celui de PLANCHEREL-WEIL et la formule d'inversion de FOURIER (cf. § 8).

Depuis les travaux de L. SCHWARTZ relatifs à la transformation de FOURIER des distributions, le calcul des transformées de FOURIER à l'aide des procédés de sommation (dans le cas de  $G = \mathbf{T}$  ou  $G = \mathbf{R}$ ) a perdu la plus grande partie de son intérêt

théorique; d'ailleurs lorsque de tels procédés s'avèrent nécessaires, il relèvent de la régularisation par des fonctions convenablement choisies.

3. Nous allons maintenant indiquer un théorème d'approximation (complétant celui du paragraphe 3, n° 2) qui sera généralisé au paragraphe 6, n° 4. Tout d'abord, si  $\varphi \in \mathfrak{C}^0(G)$  est la transformée de FOURIER d'une mesure  $\mu' \in \mathfrak{M}^1(\hat{G})$ , on appelle *spectre* de  $\varphi$  le support  $Sp(\varphi)$  de  $\mu'$ ;  $Sp(\varphi)$  est ainsi un ensemble fermé de  $\hat{G}$ , égal à l'ensemble des caractères de  $G$  que l'on peut approcher faiblement dans  $L^\infty(G)$  par des combinaisons linéaires de translatées de  $\varphi$ . De plus, l'ensemble des  $x \in G$  tels que  $\langle x, \hat{x} \rangle = 1$  pour tout  $\hat{x} \in Sp(\varphi)$  est le sous-groupe des périodes de  $\varphi$ .

Si  $\varphi \in \mathfrak{C}^0(G)$ , on peut approcher  $\varphi$  faiblement dans  $L^\infty(G)$  au moyen de polynômes trigonométriques  $\sum_i c_i \hat{x}_i$  tels que  $\hat{x}_i \in Sp(\varphi)$  et que les  $c_i$  soient des nombres réels positifs de somme inférieure à  $\varphi(e)$ . Plus généralement, on peut approcher faiblement dans  $L^\infty(G)$ , et même uniformément sur tout compact, toute fonction de  $\mathfrak{C}^0(G)$  au moyen de polynômes trigonométriques formés avec les caractères appartenant à son spectre.

Remarquons enfin que toute fonction de  $\mathfrak{C}^0(G)$  peut être approchée uniformément sur tout compact par des fonctions de  $\mathfrak{C}^1(G)$  et que toute fonction de  $\mathfrak{C}^0(G)$  peut être approchée uniformément sur tout compact par des fonctions de la forme  $\tilde{f} \star f$  où  $f \in \mathfrak{K}(G)$  [7].

4. En utilisant les résultats du n° 2, on montre alors l'important théorème suivant de L. PONTRJAGIN [14]: *si pour tout  $x \in G$ , on désigne par  $x'$  le caractère  $\hat{x} \rightarrow \overline{\langle x, \hat{x} \rangle}$  de  $\hat{G}$ ,  $x \rightarrow x'$  est un isomorphisme du groupe  $G$  sur le dual du groupe  $\hat{G}$ ; on identifiera ces deux groupes au moyen de cet isomorphisme (la formule (3) qui définit la transformation de Fourier dans  $G$  se réduit à la formule (2) écrite dans le groupe  $\hat{G}$ ). On peut alors préciser les propriétés de  $F$  et  $F'$  de la manière suivante:*

- a)  *$F$  est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre involutive normée  $\mathfrak{M}^1(G)$  sur  $\mathfrak{C}^0(\hat{G})$ ;*

- b) La restriction de  $F$  à  $\mathfrak{V}^1(G)$  applique  $\mathfrak{V}^1(G)$  sur  $\mathfrak{V}^1(\hat{G})$  et a pour application réciproque la restriction de  $F'$  à  $\mathfrak{V}^1(\hat{G})$ ;
- c)  $F$  est une isométrie de  $L^2(G) \cap L^1(G)$  sur  $\mathfrak{V}^2(\hat{G})$  et se prolonge par continuité en un isomorphisme de  $L^2(G)$  sur  $L^2(\hat{G})$ , dont le réciproque est l'application de  $L^2(\hat{G})$  sur  $L^2(G)$  qu'on obtient en prolongeant par continuité la restriction de  $F'$  à  $L^2(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$ ;
- d)  $F$  applique  $L^1(G)$  sur une sous-algèbre partout dense  $\mathfrak{A}(\hat{G})$  de  $\mathcal{K}(\hat{G})$  et on a  $\sup_{\hat{x}} |\hat{f}(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(\star f)^{1/n}$ .

$\mathfrak{V}(G)$  est donc dense par rapport à  $\mathcal{K}(G)$ , mais en général, si  $G$  n'est pas compact, l'adhérence de  $\mathfrak{V}(G)$  est distincte de  $\overline{\mathcal{K}(G)}$ . On obtient ainsi une généralisation des propriétés fondamentales de l'intégrale de FOURIER usuelle.

Pour que  $G$  soit compact, il faut et il suffit que  $\hat{G}$  soit discret. On choisit alors les mesures de HAAR comme il a été dit au paragraphe 2, n° 1. Les résultats précédents peuvent alors s'interpréter comme une extension de la théorie des séries de FOURIER:

- a) La transformation de FOURIER définie par (2) est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre  $\mathfrak{M}(G)$  (formée de toutes les mesures sur  $G$ ) sur l'algèbre  $\mathfrak{V}(\hat{G})$  des fonctions de type positif sur  $\hat{G}$ ;
- b)  $F$  applique  $\mathfrak{V}(G)$  sur l'algèbre  $L^1(\hat{G})$  des fonctions sommables dans  $\hat{G}$  et l'application réciproque de  $F$  est la transformation de FOURIER  $F'$  dans  $\hat{G}$ , transformation qui à  $f' \in L^1(\hat{G})$  associe la fonction  $x \rightarrow \sum_{\hat{x}} \langle x, \hat{x} \rangle f'(\hat{x})$  (la convergence du second membre étant normale); c'est-à-dire que l'on a en particulier

$$f(x) = \sum_{\hat{x}} \langle x, \hat{x} \rangle \hat{f}(\hat{x}) \quad (8)$$

si  $f \in \mathfrak{V}(G)$  et  $\hat{f}(\hat{x}) = \overline{\int \langle x, \hat{x} \rangle f(x) dx}$ ;  $\mathfrak{V}(G)$  est partout dense dans  $\mathcal{C}(G)$  et on peut ainsi approcher uniformément toute fonction continue dans  $G$  par des polynômes trigonométriques.

c) Comme  $L^2(G) \subset L^1(G)$ ,  $F$  est un isomorphisme de l'espace hilbertien  $L^2(G)$  sur  $L^2(\hat{G})$ ; le réciproque de  $F$  est le prolongement de  $F'$  à  $L^2(\hat{G})$ ; c'est l'application qui à  $f' \in L^2(\hat{G})$  fait correspondre la fonction  $x \rightarrow \sum_{\hat{x}} \langle x, \hat{x} \rangle f'(\hat{x})$ , la convergence ayant lieu cette fois dans  $L^2(\hat{G})$ . Ce résultat se précise encore en disant que  $G$  est une base orthonormale de  $L^2(G)$  et que le développement de  $f \in L^2(G)$  suivant cette base est donné par (8).

Signalons pour terminer que l'application des résultats qu'on vient d'indiquer à des groupes moins usuels que  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{T}^n$  ou  $\mathbf{Z}^n$  conduit à d'intéressants résultats dont on ne connaît malheureusement pas d'exposé systématique.

### § 5. La théorie de la dualité.

1. On a vu que le dual de  $\hat{G}$  était canoniquement isomorphe à  $G$ ; on peut alors développer une théorie de la dualité dans les groupes abéliens localement compacts, au moyen de la forme bilinéaire  $\langle x, \hat{x} \rangle$  définie dans  $G \times \hat{G}$ .

Si  $A$  est une partie de  $G$ , le sous-groupe fermé  $A^\perp$  de  $\hat{G}$  formé des caractères  $\hat{x} \in \hat{G}$  tels que  $\langle x, \hat{x} \rangle = 1$  si  $x \in A$  est dit *orthogonal* à  $A$ ; on définit de la même manière le sous-groupe fermé  $A'^\perp$  de  $G$  orthogonal à une partie  $A'$  de  $\hat{G}$ . Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on a  $(H^\perp)^\perp = \overline{H}$ .

- a) Ainsi  $H \rightarrow H^\perp$  est une application biunivoque, involutive et décroissante de l'ensemble des sous-groupes fermés de  $G$  (ordonné par inclusion) sur l'ensemble des sous-groupes fermés de  $\hat{G}$ , dont la correspondance réciproque est  $H' \rightarrow H'^\perp$ ; de plus le sous-groupe orthogonal à l'intersection d'une famille  $\mathfrak{F}$  de sous-groupes fermés de  $G$  est le sous-groupe de  $\hat{G}$  engendré par les orthogonaux des sous-groupes de  $\mathfrak{F}$ .
- b) Si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , tout caractère  $\hat{x} \in H^\perp$  définit par passage au quotient modulo  $H$  un caractère  $\hat{x}$  de  $G/H$  et  $x \rightarrow \hat{x}$  est un isomorphisme de  $H^\perp$  sur le dual de

$G/H$ , que l'on identifie alors à  $H^\perp$ ; de même on peut identifier canoniquement le dual de  $H$  au groupe quotient  $\hat{G}/H^\perp$ . Pour que  $H$  soit ouvert, il faut et il suffit que  $H^\perp$  soit compact; il en résulte que le sous-groupe de  $\hat{G}$  orthogonal à la composante connexe de  $e$  dans  $G$  est la réunion des sous-groupes compacts de  $\hat{G}$ , la *torsion* de  $\hat{G}$ .

- c) Soient  $G$  et  $G_1$  deux groupes abéliens localement compacts et  $u$  une représentation continue de  $G$  dans  $G_1$ ; pour tout caractère  $\hat{x}_1$  de  $G_1$ ,  $x \rightarrow \langle u(x), \hat{x}_1 \rangle$  est un caractère  ${}^t u(\hat{x}_1)$  de  $G$  et  $\hat{x}_1 \rightarrow {}^t u(\hat{x}_1)$  est une représentation continue de  $\hat{G}_1$  dans  $\hat{G}$ , dite *transposée* de  $u$ ; le sous-groupe orthogonal au noyau de  $u$  est l'adhérence de  ${}^t u(\hat{G}_1)$ ; on a  ${}^t(\nu \circ u) = {}^t u \circ {}^t \nu$  si  $\nu$  est une représentation continue de  $G_1$  dans un groupe abélien localement compact  $G_2$ . Pour que  ${}^t u$  soit un homomorphisme, il faut et il suffit que  $u$  soit un homomorphisme; en particulier, si  $u$  est un isomorphisme de  $G$  sur  $G_1$ ,  ${}^t u$  est un isomorphisme de  $\hat{G}_1$  sur  $\hat{G}$ .

Pour tous ces résultats, on pourra consulter [16] ou [33].

2. Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Si  $f \in L^1(G)$ , on a vu au paragraphe 2, n° 1, que la fonction  $\dot{f}$  qui à la classe  $\dot{x}$  de  $x$  modulo  $H$  associe  $\dot{f}(\dot{x}) = \int_H f(xy) dy$  appartient à  $L^1(G/H)$  et que  $f \rightarrow \dot{f}$  est une représentation de l'algèbre involutive normée  $L^1(G)$  sur  $L^1(G/H)$ . On voit alors facilement que la transformée de FOURIER  $\hat{y} \rightarrow \int_{G/H} \langle \dot{x}, \hat{y} \rangle \dot{f}(\dot{x}) d\dot{x}$  de  $\dot{f}$  ( $\hat{y} \in H^\perp$ ) est la restriction à  $H^\perp$  de la transformée de FOURIER  $\hat{f}$  de  $f$ ; en particulier l'idéal fermé de  $L^1(G)$ , noyau de  $f \rightarrow \dot{f}$  est formé des  $f \in L^1(G)$  telles que  $\hat{f}(\hat{y}) = 0$  si  $\hat{y} \in H^\perp$  [27]. Ce résultat se précise ainsi:  $f \rightarrow \dot{f}$  applique  $\mathcal{Q}^1(G)$  dans  $\mathcal{Q}^1(G/H)$  et la formule d'inversion de FOURIER appliquée à  $\dot{f}$  montre alors que l'on a  $\int_H f(y) dy = \int_{H^\perp} \hat{f}(\hat{y}) d\hat{y}$  (formule sommatoire de POISSON).

3. On peut déduire de la théorie de la dualité des précisions sur la structure de  $G$ . Signalons les deux résultats suivants (qui sont d'ailleurs équivalents) [24, 16, 33]:

- a) Il existe dans  $G$  un sous-groupe fermé  $G_0$  ayant un supplémentaire isomorphe à  $\mathbf{R}^n$  et  $G_0$  a un sous-groupe ouvert et compact;



b) On dit qu'un groupe localement compact est *élémentaire* s'il est isomorphe à un groupe de la forme  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^p \times \mathbf{Z}^q \times F$  où  $F$  est un groupe abélien fini; alors  $G$  contient un sous-groupe ouvert  $H$ , *limite projective* de groupes élémentaires; autrement dit, il existe dans  $H$  une base de filtre  $\mathfrak{B}$  qui converge vers  $e$ , qui est formée de sous-groupes compacts et telle que  $H/N$  soit un groupe élémentaire pour tout  $N \in \mathfrak{B}^1$ .

### § 6. Idéaux dans les algèbres de groupes et théorie spectrale.

1. La théorie des idéaux de l'algèbre  $L^1(G)$  présente de grandes difficultés et elle est encore assez peu avancée (même pour  $G = \mathbf{R}$ ) sauf dans le cas des groupes *compacts*. Elle se fait essentiellement au moyen de la représentation de  $L^1(G)$ , au moyen de la transformation de FOURIER, sur la sous-algèbre  $\mathcal{A}(\hat{G})$  de  $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$ .

Soit  $H$  une partie de  $L^1(G)$ ; on appelle *cospectre* de  $H$  et on désigne par  $\text{Cosp}(H)$  l'ensemble des caractères  $\hat{x} \in \hat{G}$  tels que  $\hat{f}(\hat{x}) = 0$  pour toute  $f \in H$ .  $\text{Cosp}(H)$  est un ensemble fermé de  $\hat{G}$ , égal au cospectre de l'idéal fermé de  $L^1(G)$  engendré par  $H$ . On remarquera que l'intérieur du cospectre de  $f \in L^1(G)$  est simplement le complémentaire du support de  $\hat{f}$ .

Soit maintenant  $A'$  une partie de  $\hat{G}$  et  $Z(A')$  l'ensemble des fonctions de  $L^1(G)$  dont les transformées de FOURIER s'annulent dans  $A'$ , c'est-à-dire dont le cospectre contient  $A'$ .  $Z(A')$  est un idéal fermé de  $L^1(G)$  et on a  $Z(A') = Z(\overline{A'})$ ,  $\overline{A'}$  étant l'adhérence de  $A'$ . De plus, pour tout ensemble fermé  $A'$  de  $\hat{G}$ , on a  $\text{Cosp}(Z(A')) = A'$ ; cela tient essentiellement au fait que, pour tout compact  $K'$  de  $\hat{G}$  et tout voisinage  $U'$  de  $K'$  dans  $\hat{G}$ , on peut trouver une fonction  $f \in L^1(G)$  telle que  $\hat{f}$  égale 1 dans

<sup>1</sup> Pour de plus amples détails sur la théorie de la dualité et la structure des groupes abéliens, cf. J. BRACONNIER, Sur les groupes topologiques localement compacts. *Journal Math. pures et appl.*, 27, 1-85 (1948).

$K'$  et s'annule dans  $\mathfrak{C}U'$ ; on résume souvent cette propriété en disant que  $L^1(G)$  est une algèbre *régulière* (cf. [11, 13]).

A cette propriété se rattache la suivante: *soit  $K'$  un ensemble compact de  $\hat{G}$  et  $f$  une fonction de  $L^1(G)$ ; si le cospectre de  $f$  ne rencontre pas  $K'$ , il existe une fonction  $g \in L^1(G)$  telle que  $\hat{g}(\hat{x}) = 1/\hat{f}(\hat{x})$  si  $\hat{x} \in K'$  (résultat dû à N. WIENER pour  $G = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{Z}$  [34] et à R. GODEMENT [13] pour  $G$  quelconque); plus généralement, si  $h$  est une fonction holomorphe dans  $K' \cap \hat{f}(\hat{G})$ , il existe une fonction  $g \in L^1(G)$  telle que  $\hat{g}(\hat{x}) = h(\hat{f}(\hat{x}))$  pour tout  $\hat{x} \in K'$ ; ce résultat, dû à T. CARLEMAN [6] pour  $G = \mathbf{R}$  a été démontré par I. SEGAL [20], puis par H. J. REITER [27] pour  $G$  quelconque. Il peut s'interpréter comme une propriété de clôture de l'algèbre normée, non complète,  $\mathfrak{A}(\hat{G})$ .*

2. On a déjà remarqué que *tout idéal régulier maximal de  $L^1(G)$  est de la forme  $Z(\hat{x})$  où  $\hat{x}$  est un caractère de  $G$ ; de plus  $L^1(G)$  est semi-simple, puisque séparée par ses caractères (§ 3, n° 1).*

*Tout idéal fermé  $I$  de  $L^1(G)$ , distinct de  $L^1(G)$ , est contenu dans un idéal régulier maximal au moins.* Autrement dit, pour qu'un idéal fermé  $I$  de  $L^1(G)$  soit égal à  $L^1(G)$ , il faut et il suffit que, pour tout  $\hat{x} \in \hat{G}$ , il existe  $f \in I$  telle que  $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$ ; en particulier, *pour que l'ensemble des translatées de  $f \in L^1(G)$  soit total dans  $L^1(G)$ , il faut et il suffit que  $\hat{f}$  ne s'annule en aucun point de  $\hat{G}$ .* On a là une des formes du célèbre *théorème taubérien de WIENER* (la démonstration pour  $G = \mathbf{R}$  est due à N. WIENER [34] et, pour  $G$  quelconque à R. GODEMENT [13]; cf. aussi [30]. On en déduit une autre forme du théorème taubérien, qui est la suivante: supposons que  $G$  ne soit pas compact et que  $f$  soit une fonction de  $L^1(G)$  telle que  $\hat{f}$  ne s'annule pas; si  $g$  est une fonction de  $L^\infty(G)$  telle que  $f \star g$  s'annule à l'infini, alors  $h \star g$  s'annule à l'infini pour toute fonction  $h \in L^1(G)$  (il suffit de voir que l'ensemble des  $h \in L^1(G)$  ayant la propriété indiquée est un idéal fermé de  $L^1(G)$  contenant  $f$ , donc égal à  $L^1(G)$  d'après la première forme du théorème taubérien).

3. Pour tout idéal fermé  $I$  de  $L^1(G)$ , on a  $I \subset Z(\text{Cosp}(I))$ ; mais il existe en général des idéaux fermés  $I$  pour lesquels  $I$  est



distinct de  $Z(\text{Cosp}(I))$ : c'est par exemple ce qui se passe si  $G = \mathbf{R}^n$ , avec  $n \geq 3$ <sup>1</sup>. Il est intéressant de connaître des conditions suffisantes pour qu'une fonction  $f \in Z(\text{Cosp}(I))$  appartienne à  $I$ : le théorème taubérien peut, par exemple, s'exprimer en disant que l'on a  $I = Z(\text{Cosp}(I))$  si  $\text{Cosp}(I)$  est vide. Une des conditions les plus simples est la suivante, qui généralise le théorème taubérien: *si  $\hat{f}$  est une fonction de  $L^1(G)$  telle que le support de  $\hat{f}$  ne rencontre pas le cospectre de l'idéal fermé  $I$  de  $L^1(G)$ , alors  $f$  appartient à  $I$  [30]* (cela signifie que toute fonction de  $Z(\text{Cosp}(I))$  appartient « localement » à  $I$ ). Ce résultat suffit déjà pour faire la théorie des idéaux de  $L^1(G)$  lorsque  $G$  est compact:  $\hat{G}$  est alors discret et on voit alors immédiatement que  $I \rightarrow \text{Cosp}(I)$  est une application biunivoque et décroissante de l'ensemble des idéaux fermés de  $L^1(G)$  sur  $\mathfrak{P}(\hat{G})$ , application dont la réciproque est  $Z$ ; autrement dit, tout idéal fermé de l'algèbre d'un groupe compact  $G$  est formé des fonctions de  $L^1(G)$  dont les transformées de FOURIER s'annulent sur une partie bien déterminée de  $\hat{G}$ .

Si  $I$  est un idéal fermé de  $L^1(G)$  et si  $f \in Z(\text{Cosp}(I))$ , on voit facilement que le support de  $f$  rencontre  $\text{Cosp}(I)$  suivant un ensemble contenu dans la frontière de  $\text{Cosp}(I)$  (donc rare); *si, de plus, cet ensemble est clairsemé* (i.e. ne contient aucun ensemble parfait qui ne soit déjà vide), *alors  $f \in I$* . Ce résultat, qui généralise visiblement tous les précédents, est dû à S. AGMON et S. MANDELBOJT [22] si  $G = \mathbf{R}$  et à H. HELSON [15] et H. J. REITER [27] pour  $G$  quelconque.

La démonstration utilise essentiellement une technique de DITKIN<sup>2</sup> et le fait suivant: il existe dans  $G$  une base de filtre  $\Psi(G)$  dont les ensembles sont formés de fonctions  $f$  intégrables, positives, de type positif et telles que  $\int f(x) dx = 1$  et que le support de  $\hat{f}$  soit compact, base de filtre suivant laquelle  $f \rightarrow \hat{f}(\hat{x})$  converge vers 1 pour tout  $\hat{x} \in \hat{G}$ ; suivant cette base de filtre,  $f \rightarrow f \star g$  converge vers  $g$  (resp. 0) dans  $L^1(G)$  pour toute  $g \in L^1(G)$ . (resp. telle que

<sup>1</sup> Cf. L. SCHWARTZ, Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227, 424-426 (1948) et Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions, *Can. Journ. of Math.*, 3, 503-512 (1951).

<sup>2</sup> Cf. V. DITKIN, On the structure of ideals in certain normed rings. *Uchenye Zapiski Moskov, Gos. Univ. Mat.*, 30, 83-130 (1939).

$\int g(x) dx = 0$ ); en particulier, on voit que les fonctions à support compact forment dans  $\mathcal{A}(\hat{G})$  un idéal partout dense [13].

En particulier, si  $I$  est un idéal fermé de  $L^1(G)$  tel que la frontière de  $\text{Cosp}(I)$  soit clairsemée (par exemple si  $\text{Cosp}(I)$  est discret), on a  $I = Z(\text{Cosp}(I))$ . Remarquons que dire que  $\text{Cosp}(I)$  se réduit à un point  $\hat{x} \in \hat{G}$  revient à dire que l'idéal fermé  $I$  est contenu dans le seul idéal maximal  $Z(\hat{x})$  (i.e. que  $I$  est primaire); le résultat précédent montre qu'on a alors  $I = Z(\hat{x})$ , c'est-à-dire que  $I$  est maximal. Ce résultat avait déjà été prouvé par I. SEGAL [30] pour  $G = \mathbf{R}$  et par J. RISS [28] et I. KAPLANSKY [17] pour  $G$  quelconque. Remarquons encore que, si  $I$  est un idéal fermé de  $L^1(G)$  dont le cospectre est fini,  $I = Z(\text{Cosp}(I))$  est de codimension finie égale au nombre d'éléments de  $\text{Cosp}(I)$ ; plus généralement, si  $\text{Cosp}(I)$  est discret, on peut donner des précisions supplémentaires sur la structure de l'algèbre quotient  $L^1(G)/I$  [27].

4. Soit maintenant  $H$  une partie de  $L^\infty(G)$ ; on désigne par  $J(H)$  le sous-espace faiblement fermé de  $L^\infty(G)$  invariant par les translations de  $G$  et engendré par  $H$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de  $L^\infty(G)$  que l'on peut approcher faiblement dans  $L^\infty(G)$  par des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de  $H$ . On appelle *spectre* de  $H$  l'ensemble fermé  $Sp(H) = \hat{G} \cap J(H)$  de  $\hat{G}$ . On dit que  $H$  est *moyenne périodique* si  $J(H)$  est distinct de  $L^\infty(G)$ . L'idéal fermé  $I$  de  $L^1(G)$  constitué par les fonctions orthogonales aux fonctions de  $J(H)$  est évidemment aussi formé des fonctions  $f \in L^1(G)$  telles que  $\tilde{f} * g = 0$  pour toute fonction  $g \in H$ ; pour que  $H$  soit moyenne périodique, il faut et il suffit que  $I \neq 0$ ; de plus *le spectre de  $H$  est le cospectre de  $I$* . On peut ainsi associer à chacun des résultats ci-dessus une proposition de théorie spectrale qui apparaîtra le plus souvent comme un théorème d'approximation dans  $L^\infty(G)$ .

Tout d'abord, si  $A'$  est une partie fermée de  $\hat{G}$ , elle est égale à son spectre et l'idéal orthogonal à  $J(A')$  est  $Z(A')$ . D'autre part, si  $g \in \mathfrak{M}^1(G)$ , le spectre de  $g$  est celui qu'on a déjà défini au n° 3 du paragraphe 4, c'est-à-dire le support de la mesure de  $\mathfrak{M}^1(\hat{G})$  dont  $g$  est la transformée de FOURIER; enfin, il est

clair que, si  $g$  est intégrable et bornée dans  $G$ , le spectre de  $G$  est le support de  $\hat{g}$ .

Le théorème taubérien de WIENER signifie que, si  $H \in L^\infty(G)$  est telle que  $J(H)$  ne soit pas réduit à 0, le spectre de  $H$  n'est pas vide (théorème de BEURLING [1]). En général,  $J(H)$  contient évidemment  $J(\text{Sp}(H))$ , mais ces deux espaces sont distincts. Toutefois, si  $U'$  est un voisinage de  $\text{Sp}(H)$  dans  $G$ , on a  $H \subset J(U')$ , c'est-à-dire qu'on peut approcher faiblement dans  $L^\infty(G)$ , et même uniformément sur tout compact, toute fonction de  $H$  par des polynômes trigonométriques formés avec les éléments de  $U'$ . Dans le cas où  $G$  est compact, on voit ainsi que  $J(H) = J(\text{Sp}(H))$  pour toute partie  $H$  de  $L^\infty(G)$ . Plus généralement, si la frontière de  $\text{Sp}(H)$  est clairsemée (par exemple si  $\text{Sp}(H)$  est discret), on a  $H \subset J(\text{Sp}(H))$ . Si  $\text{Sp}(H)$  est discret, on peut alors associer à chaque fonction de  $H$  un développement formel canonique suivant  $\text{Sp}(H)$ ; si de plus  $f \in H$  est uniformément continue,  $f$  est presque périodique [27]; la théorie des fonctions presque périodiques permet d'ailleurs de préciser de nombreuses propriétés spectrales [27], mais il n'existe pas à l'heure actuelle d'étude systématique des rapports qui existent entre la théorie spectrale et la théorie ergodique. Il est permis de croire qu'on pourra encore préciser considérablement les critères indiqués ci-dessus pour qu'un idéal  $I$  de  $L^1(G)$  soit égal à  $Z(\text{Cosp}(I))$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEURLING, A., Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel. *Acta Mathematica*, t. LXXVII (1945), pp. 127-136.
- [2] BOCHNER, S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig Akad. Verlagsgesellschaft (1932).
- [3] BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique*, Livre III, Topologie générale (fasc. de résultats). *Actual. Scient. et Ind.*, n° 1196, Paris (1953).
- [4] ——— Ibid., Livre V, Espaces vectoriels topologiques. *Actual. Scient. et Ind.*, nos 1189 et 1229, Paris (1953-1955).
- [5] ——— Ibid., Livre VI, Intégration. *Actual. Scient. et Ind.*, n° 1175, Paris (1952).
- [6] CARLEMAN, T., *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*. Uppsala (1944).

- [7] CARTAN, H. et R. GODEMENT, Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens. *Ann. Scient. E.N.S.*, t. LXIV (1947), pp. 77-99.
- [8] GELFAND, I., Normierte Ringe. *Rec. Math. Moscou*, N.S. t. IX (1941), pp. 3-24.
- [9] ——— et M. NEUMARK, On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Rec. Math. Moscou*, N. S. t. XII (1943), pp. 197-212.
- [10] ——— et D. A. RAÏKOV, Sur la théorie des caractères des groupes topologiques commutatifs. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, t. XXV (1939), pp. 570-572.
- [11] ———, D. A. RAÏKOV et G. J. ŠILOV, Anneaux normés commutatifs. *Uspekhi Mat. Nauk.*, N.S., t. II (1946), pp. 48-146.
- [12] GODEMENT, R., Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXIII (1948), pp. 1-84.
- [13] ——— Théorèmes taubériens et théorie spectrale. *Ann. Scient. E.N.S.*, t. LXIV (1947), pp. 119-138.
- [14] ——— Sur la théorie des représentations unitaires. *Ann. of Math.*, t. LIII (1951), pp. 68-124.
- [15] HELSON, H., Spectral synthesis of bounded functions. *Ark. Mat.*, t. I (1951), pp. 497-502.
- [16] VAN KAMPEN, E. R., Locally bi-compact groups and their character groups. *Ann. of Math.*, t. XXXVII (1936), pp. 78-91.
- [17] KAPLANSKY, I., Primary ideals in group algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXXV (1949), pp. 133-136.
- [18] KREIN, M., Sur une généralisation du théorème de Plancherel au cas des intégrales de Fourier sur les groupes topologiques commutatifs. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, t. XXX (1941), pp. 484-488.
- [19] LOOMIS, L. H., *An introduction to abstract harmonic analysis*. New York (1953).
- [20] MACKEY, G. W., The Laplace transform for locally compact groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXXIV (1948), pp. 156-162.
- [21] ——— Functions on locally compact groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LVI (1950), pp. 385-412.
- [22] MANDELBOJT, S. et AGMON, S. Une généralisation du théorème taubérien de Wiener. *Acta Szeged*, t. XII (1950), pp. 167-176.
- [23] NEUMARK, M., Involutive Algebren. *Uspekhi Mat. Nauk.*, t. III (1948), pp. 52-145 (= *Sowjetische Arbeiten zur Funktional-Analyse*, Berlin (1954), pp. 89-196).
- [24] PONTRJAGIN, L., *Topological groups*. Princeton (1939).
- [25] RAÏKOV, D. A., Fonctions de type positif sur les groupes commutatifs avec une mesure invariante. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, t. XXVIII (1947), pp. 296-300.
- [26] ——— Analyse harmonique dans les groupes commutatifs avec la mesure de Haar et la théorie des caractères. *Publ. Inst. Math. Steklov*, t. XIV (1945), pp. 5-86 (= *Sowjetische Arbeiten zur Funktional-Analyse*, Berlin (1954), pp. 11-87).
- [27] REITER, H., Investigations in harmonic analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXXIII (1952), pp. 401-427.

- [28] RISS, J., Eléments de calcul différentiel et théorie des distributions dans les groupes abéliens localement compacts. *Acta Mathematica*, t. LXXXIX (1953), pp. 45-105.
  - [29] SCHWARTZ, L., Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. *Ann. of Math.*, t. ILVIII (1947), pp. 857-929.
  - [30] SEGAL, I., The group algebra of a locally compact group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXI (1947), pp. 69-105.
  - [31] STONE, H., A general theory of spectra. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXVI (1940), pp. 280-283.
  - [32] ——— On the foundations of harmonic analysis. *Meddlanden Lunds Univ. Mat. Sem.*, fasc. dédié à M. Riesz (1952), pp. 207-227.
  - [33] WEIL, A., *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. *Actual. Scient. et Ind.*, n° 869, Paris (1940).
  - [34] WIENER, N., *The Fourier integral and certain of its applications*. Cambridge Univ. Press (1933).
  - [35] ZYGMUND, A., *Trigonometrical series*. *Monografje Mat.*, t. V, Varsovie (1935).
-