

## § 3. Caractères d'un groupe abélien.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### § 3. Caractères d'un groupe abélien.

Dans tout ce qui suit, on supposera que le groupe  $G$  que l'on considère est abélien.

1. Une représentation continue de  $G$  dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue 1 s'appelle un *caractère* de  $G$ . On désignera par  $\hat{G}$  l'ensemble des caractères de  $G$ .  $\hat{G}$  est ainsi une partie de  $L^\infty(G)$  et, comme l'ensemble  $\hat{G} \cup \{0\}$  de  $L^\infty(G)$  est faiblement compact,  $\hat{G}$  est localement compact pour la topologie faible de  $L^\infty(G)$ ; en outre, on voit facilement que, dans  $\hat{G}$ , cette topologie coïncide avec la topologie de convergence compacte dans  $G$ . Enfin, il est clair que, si  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont des caractères de  $G$ , il en est de même de  $\hat{x}\hat{y}$  et que, muni de la loi de composition  $(\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow \hat{x}\hat{y}$  et de la topologie décrite ci-dessus,  $\hat{G}$  est un groupe abélien localement compact, que l'on nomme *dual* de  $G$ . Remarquons que, si  $x \in G$ ,  $\hat{x} \rightarrow \overline{\hat{x}}(x)$  est un caractère  $x'$  de  $\hat{G}$ ; on verra au paragraphe 4, n° 4, que  $x \rightarrow x'$  est un isomorphisme de  $G$  sur le dual du groupe  $\hat{G}$ . Les groupes  $G$  et  $\hat{G}$  vont jouer des rôles symétriques et il sera commode de désigner par  $\langle x, \hat{x} \rangle$  la valeur que prend au point  $x \in G$  le caractère  $\hat{x} \in \hat{G}$ .

Par exemple, tout caractère du groupe additif  $\mathbf{R}^n$  est de la forme  $\mathbf{x} \rightarrow \exp(2i\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$  où  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  est le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbf{R}^n$ ; on voit ainsi qu'on peut identifier le dual de  $\mathbf{R}^n$  à  $\mathbf{R}^n$  lui-même en posant  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \exp(2i\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ . De même tout caractère du groupe additif  $\mathbf{T}$  des nombres réels modulo 1 est de la forme  $x \rightarrow \exp(2i\pi nx')$  où  $n$  est un entier rationnel et où  $x'$  est un représentant dans  $\mathbf{R}$  de  $x \in \mathbf{T}$ ; on peut ainsi identifier le dual de  $\mathbf{T}$  au groupe additif  $\mathbf{Z}$  des entiers rationnels en posant  $\langle x, n \rangle = \exp(2i\pi nx')$ . On voit d'ailleurs facilement que le dual de  $\mathbf{Z}$  s'identifie à  $\mathbf{T}$  en posant  $\langle n, x \rangle = \overline{\langle x, n \rangle}$ . Ces identifications sont bien entendu compatibles avec les topologies des différents groupes considérés.

Pour tout  $\hat{x} \in \hat{G}$ , la formule

$$\chi_{\hat{x}}(f) = \int f(x) \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} dx \quad (f \in L^1(G)) \quad (1)$$

définit un caractère continu de l'algèbre involutive normée  $L^1(G)$ ; réciproquement, on montre facilement [10, 13] que tout caractère continu de  $L^1(G)$  est défini par la formule  $\chi(f) = \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$  où  $\varphi$  est une fonction de  $L^\infty(G)$  égale presque partout à un caractère de  $G$  auquel on l'identifie. On obtient ainsi une correspondance biunivoque  $\hat{x} \rightarrow \chi_{\hat{x}}$  entre  $\hat{G}$  et le spectre de  $L^1(G)$ , correspondance qui est naturellement un homéomorphisme. On notera que  $L^1(G)$  est ainsi une algèbre symétrique au sens du paragraphe 1, n° 2.

Le caractère de  $L^1(G)$  défini par la formule (1) se prolonge naturellement en un caractère continu de l'algèbre involutive normée  $\mathfrak{N}^1(G)$  au moyen de la formule  $\chi_{\hat{x}}(\mu) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} d\mu(x)$  (mais on n'obtient pas ainsi tous les caractères de  $\mathfrak{N}^1(G)$ ).

On démontre le résultat suivant, par un procédé dû à I. GELFAND et D. A. RAÏKOV [10, 26]: *l'algèbre  $L^1(G)$  est séparée par ses caractères* (i.e.  $L^1(G)$  est *semi-simple*): pour toute fonction  $f \neq 0$  de  $L^1(G)$ , il existe  $\hat{x} \in \hat{G}$  tel que  $\chi_{\hat{x}}(f) \neq 0$ . Ce résultat entraîne que  $G$  est séparé par ses caractères, c'est-à-dire que pour tout élément  $x \neq e$  de  $G$ , il existe  $\hat{x} \in \hat{G}$  tel que  $\langle x, \hat{x} \rangle \neq 1$ .

2. Il sera commode d'appeler *polynôme trigonométrique* dans  $G$  toute combinaison linéaire à coefficients complexes de caractères de  $G$ ; les exemples donnés au n° 1 montrent que cette définition est la définition usuelle des polynômes trigonométriques si  $G = \mathbf{T}$  ou  $G = \mathbf{R}$ . Dans le cas où  $G$  est compact, comme  $G$  est séparé par ses caractères, le théorème de WEIERSTRASS-STONE prouve immédiatement que l'on peut approcher uniformément toute fonction continue dans un groupe compact par des polynômes trigonométriques (i.e. que  $\hat{G}$  est un ensemble total dans  $\mathcal{C}(G)$ , muni de la topologie de convergence uniforme).

Tout caractère de  $G$  est évidemment une fonction de type positif dans  $G$ ; par suite tout polynôme trigonométrique appartient à  $\mathfrak{P}(G)$ .

De plus, on montre facilement que  $\hat{G}$  est l'ensemble des points extrémaux distincts de 0 de l'ensemble convexe  $\mathfrak{P}_0(G)$  formé des fonctions  $\varphi$  de type positif telles que  $\varphi(e) = \sup |\varphi(x)| \leq 1$ . Comme  $\mathfrak{P}_0(G)$  est faiblement compact, le théorème de KREIN-MILMAN<sup>1</sup> permet alors d'énoncer le théorème d'approximation

<sup>1</sup> Cf. [4], Ch. II, § 4, n° 2.

suisant: toute fonction  $\varphi \in \mathfrak{R}(G)$  peut être faiblement approchée (dans  $L^\infty(G)$ ) par des polynômes trigonométriques à coefficients positifs, coefficients dont la somme est égale à  $\varphi(e)$  [7, 12]; ce résultat se complète d'ailleurs facilement de la façon suivante: toute fonction de  $\mathfrak{V}(G)$  peut être approchée uniformément sur tout compact par des polynômes trigonométriques; il en est par suite de même pour toute fonction continue dans  $G$ . On verra au paragraphe 4, n° 3, d'importants compléments à ces résultats.

#### § 4. La transformation de Fourier.

1. Il est maintenant facile de définir la *transformée de FOURIER* d'une fonction  $f \in L^1(G)$ : c'est la fonction  $\hat{f}$  définie dans  $\hat{G}$  par la formule  $\hat{f}(\hat{x}) = \chi_{\hat{x}}(f)$ ; autrement dit, on pose

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} f(x) dx; \quad (1)$$

$\hat{f}$  est alors une fonction continue et nulle à l'infini dans  $\hat{G}$  en vertu de la définition de la topologie de  $\hat{G}$  (généralisation du classique théorème de RIEMANN-LEBESGUE). Plus précisément, on voit facilement, d'après la formule (1), que la *transformation de FOURIER*  $f \rightarrow \hat{f}$  est une *représentation continue de l'algèbre involutive normée*  $L^1(G)$  sur une sous-algèbre  $\mathfrak{A}(\hat{G})$  de  $\mathfrak{K}(\hat{G})$ .

Le fait que  $G$  est séparé par ses caractères signifie alors que  $f \rightarrow \hat{f}$  est *biunivoque* (c'est-à-dire que toute fonction intégrable est déterminée par sa transformée de FOURIER). La définition (1) montre de plus que les fonctions de  $\mathfrak{A}(\hat{G})$  séparent  $\hat{G}$ ; le théorème de WEIERSTRASS-STONE prouve alors que  $\mathfrak{A}(\hat{G})$  est *partout dense dans*  $\mathfrak{K}(\hat{G})$ , c'est-à-dire que l'on peut approcher uniformément toute fonction continue, nulle à l'infini, dans  $\hat{G}$  par des transformées de FOURIER de fonctions de  $L^1(G)$ .

La définition de la transformation de FOURIER s'étend naturellement à  $\mathfrak{M}^1(G)$ : la *transformée de FOURIER* de  $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$  est la fonction  $F_\mu$  continue et bornée dans  $\hat{G}$  définie par

$$F_\mu(\hat{x}) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} d\mu(x). \quad (2)$$