§ 6. Idéaux dans les algèbres de groupes et théorie spectrale.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

b) On dit qu'un groupe localement compact est *élémentaire* s'il est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^p \times \mathbf{Z}^q \times \mathrm{F}$ où F est un groupe abélien fini; alors G contient un sous-groupe ouvert H, *limite projective* de groupes élémentaires; autrement dit, il existe dans H une base de filtre $\mathfrak{P}$ qui converge vers e, qui est formée de sous-groupes compacts et telle que H/N soit un groupe élémentaire pour tout $\mathrm{N} \in \mathfrak{P}$[1].

§ 6. Idéaux dans les algèbres de groupes et théorie spectrale.

1. La théorie des idéaux de l'algèbre $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ présente de grandes difficultés et elle est encore assez peu avancée (même pour $\mathrm{G} = \mathbf{R}$) sauf dans le cas des groupes *compacts*. Elle se fait essentiellement au moyen de la représentation de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$, au moyen de la transformation de Fourier, sur la sous-algèbre $\mathcal{A}(\hat{\mathrm{G}})$ de $\overline{\mathcal{K}(\hat{\mathrm{G}})}$.

Soit H une partie de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$; on appelle *cospectre* de H et on désigne par Cosp (H) l'ensemble des caractères $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$ tels que $\hat{f}(\hat{x}) = 0$ pour toute $f \in \mathrm{H}$. Cosp (H) est un ensemble fermé de $\hat{\mathrm{G}}$, égal au cospectre de l'idéal fermé de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ engendré par H. On remarquera que l'intérieur du cospectre de $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ est simplement le complémentaire du support de $\hat{f}$.

Soit maintenant A′ une partie de $\hat{\mathrm{G}}$ et Z (A′) l'ensemble des fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ dont les transformées de Fourier s'annulent dans A′, c'est-à-dire dont le cospectre contient A′. Z (A′) est un idéal fermé de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ et on a $\mathrm{Z}(\mathrm{A}') = \mathrm{Z}(\overline{\mathrm{A}'})$, $\overline{\mathrm{A}'}$ étant l'adhérence de A′. De plus, pour tout ensemble *fermé* A′ de $\hat{\mathrm{G}}$, on a $\mathrm{Cosp}(\mathrm{Z}(\mathrm{A}')) = \mathrm{A}'$; cela tient essentiellement au fait que, pour tout compact K′ de $\hat{\mathrm{G}}$ et tout voisinage U′ de K′ dans $\hat{\mathrm{G}}$, on peut trouver une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ telle que $\hat{f}$ égale 1 dans

[1] Pour de plus amples détails sur la théorie de la dualité et la structure des groupes abéliens, cf. J. Braconnier, Sur les groupes topologiques localement compacts. *Journal Math. pures et appl.*, 27, 1-85 (1948).

K′ et s'annule dans $\complement U'$; on résume souvent cette propriété en disant que $L^1(G)$ est une algèbre *régulière* (cf. [11, 13]).

A cette propriété se rattache la suivante: *soit* K′ *un ensemble compact de* $\hat{G}$ *et* f *une fonction de* $L^1(G)$; si le cospectre de f ne rencontre pas K′, il existe une fonction $g \in L^1(G)$ telle que $\hat{g}(\hat{x}) = 1/\hat{f}(\hat{x})$ si $\hat{x} \in K'$ (résultat dû à N. Wiener pour $G = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Z}$ [34] et à R. Godement [13] pour G quelconque); plus généralement, *si* h *est une fonction holomorphe dans* $K' \cap \hat{f}(\hat{G})$, *il existe une fonction* $g \in L^1(G)$ *telle que* $\hat{g}(\hat{x}) = h(\hat{f}(\hat{x}))$ *pour tout* $\hat{x} \in K'$; ce résultat, dû à T. Carleman [6] pour $G = \mathbf{R}$ a été démontré par I. Segal [20], puis par H. J. Reiter [27] pour G quelconque. Il peut s'interpréter comme une propriété de clôture de l'algèbre normée, non complète, $\mathfrak{A}(\hat{G})$.

2. On a déjà remarqué que *tout idéal régulier maximal de* $L^1(G)$ *est de la forme* $Z(\hat{x})$ où $\hat{x}$ est un caractère de G; de plus $L^1(G)$ *est semi-simple*, puisque séparée par ses caractères (§ 3, n° 1).

Tout idéal fermé I *de* $L^1(G)$, *distinct de* $L^1(G)$, *est contenu dans un idéal régulier maximal au moins.* Autrement dit, pour qu'un idéal fermé I de $L^1(G)$ soit égal à $L^1(G)$, il faut et il suffit que, pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, il existe $f \in I$ telle que $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$; en particulier, *pour que l'ensemble des translatées de* $f \in L^1(G)$ *soit total dans* $L^1(G)$, *il faut et il suffit que* $\hat{f}$ *ne s'annule en aucun point de* $\hat{G}$. On a là une des formes du célèbre *théorème taubérien de* Wiener (la démonstration pour $G = \mathbf{R}$ est due à N. Wiener [34] et, pour G quelconque à R. Godement [13]; cf. aussi [30]. On en déduit une autre forme du théorème taubérien, qui est la suivante: supposons que G ne soit pas compact et que f soit une fonction de $L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ ne s'annule pas; si g est une fonction de $L^\infty(G)$ telle que $f \star g$ s'annule à l'infini, alors $h \star g$ s'annule à l'infini pour toute fonction $h \in L^1(G)$ (il suffit de voir que l'ensemble des $h \in L^1(G)$ ayant la propriété indiquée est un idéal fermé de $L^1(G)$ contenant f, donc égal à $L^1(G)$ d'après la première forme du théorème taubérien).

3. Pour tout idéal fermé I de $L^1(G)$, on a $I \subset Z(\mathrm{Cosp}(I))$; mais il existe en général des idéaux fermés I pour lesquels I est

distinct de Z (Cosp (I)): c'est par exemple ce qui se passe si $G = \mathbf{R}^n$, avec $n \geqslant 3$ [1]. Il est intéressant de connaître des conditions suffisantes pour qu'une fonction $f \in$ Z (Cosp (I)) appartienne à I: le théorème taubérien peut, par exemple, s'exprimer en disant que l'on a I = Z (Cosp (I)) si Cosp (I) est vide. Une des conditions les plus simples est la suivante, qui généralise le théorème taubérien: *si* $\hat{f}$ *est une fonction de* L^1 (G) *telle que le support de* $\hat{f}$ *ne rencontre pas le cospectre de l'idéal fermé* I *de* L^1 (G), *alors* f *appartient à* I [30] (cela signifie que toute fonction de Z (Cosp (I)) appartient « localement » à I). Ce résultat suffit déjà pour faire la théorie des idéaux de L^1 (G) lorsque G est *compact*: $\hat{G}$ est alors discret et on voit alors immédiatement que I → Cosp (I) *est une application biunivoque et décroissante de l'ensemble des idéaux fermés de* L^1 (G) *sur* $\mathfrak{P}(\hat{G})$, *application dont la réciproque est* Z; autrement dit, tout idéal fermé de l'algèbre d'un groupe compact G est formé des fonctions de L^1 (G) dont les transformées de Fourier s'annulent sur une partie bien déterminée de $\hat{G}$.

Si I est un idéal fermé de L^1 (G) et si $f \in$ Z (Cosp (I)), on voit facilement que le support de f rencontre Cosp (I) suivant un ensemble contenu dans la frontière de Cosp (I) (donc rare); *si, de plus, cet ensemble est clairsemé* (i.e. ne contient aucun ensemble parfait qui ne soit déjà vide), *alors* $f \in$ I. Ce résultat, qui généralise visiblement tous les précédents, est dû à S. Agmon et S. Mandelbrojt [22] si $G = \mathbf{R}$ et à H. Helson [15] et H. J. Reiter [27] pour G quelconque.

La démonstration utilise essentiellement une technique de Ditkin [2] et le fait suivant: il existe dans G une base de filtre Ψ (G) dont les ensembles sont formés de fonctions f intégrables, positives, de type positif et telles que $\int f(x)\,dx = 1$ et que le support de $\hat{f}$ soit compact, base de filtre suivant laquelle $f \to \hat{f}(\hat{x})$ converge vers 1 pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$; suivant cette base de filtre, $f \to f \star g$ converge vers g (resp. 0) dans L^1 (G) pour toute $g \in L^1$ (G). (resp. telle que

[1] Cf. L. Schwartz, Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227, 424-426 (1948) et Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions, *Can. Journ. of Math.*, 3, 503-512 (1951).

[2] Cf. V. Ditkin, On the structure of ideals in certain normed rings. *Ucenye Zapiski Moskov, Gos. Univ. Mat.*, 30, 83-130 (1939).

$\int g(x)\,dx = 0$); en particulier, on voit que les fonctions à support compact forment dans $\mathfrak{A}(\hat{G})$ un idéal partout dense [13].

En particulier, *si* I *est un idéal fermé de* $L^1(G)$ *tel que la frontière de* Cosp (I) *soit clairsemée* (par exemple si Cosp (I) est discret), *on a* $I = Z(\mathrm{Cosp}(I))$. Remarquons que dire que Cosp (I) se réduit à un point $\hat{x} \in \hat{G}$ revient à dire que l'idéal fermé I est contenu dans le seul idéal maximal $Z(\hat{x})$ (i.e. que I est primaire); le résultat précédent montre qu'on a alors $I = Z(\hat{x})$, c'est-à-dire que I est maximal. Ce résultat avait déjà été prouvé par I. Segal [30] pour $G = \mathbf{R}$ et par J. Riss [28] et I. Kaplansky [17] pour G quelconque. Remarquons encore que, si I est un idéal fermé de $L^1(G)$ dont le cospectre est fini, $I = Z(\mathrm{Cosp}(I))$ est de codimension finie égale au nombre d'éléments de Cosp (I); plus généralement, si Cosp (I) est discret, on peut donner des précisions supplémentaires sur la structure de l'algèbre quotient $L^1(G)/I$ [27].

4. Soit maintenant H une partie de $L^\infty(G)$; on désigne par J (H) le sous-espace faiblement fermé de $L^\infty(G)$ invariant par les translations de G et engendré par H, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $L^\infty(G)$ que l'on peut approcher faiblement dans $L^\infty(G)$ par des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de H. On appelle *spectre* de H l'ensemble fermé $Sp(H) = \hat{G} \cap J(H)$ de $\hat{G}$. On dit que H est *moyenne périodique* si J (H) est distinct de $L^\infty(G)$. L'idéal fermé I de $L^1(G)$ constitué par les fonctions orthogonales aux fonctions de J (H) est évidemment aussi formé des fonctions $f \in L^1(G)$ telles que $\tilde{f} \star g = 0$ pour toute fonction $g \in H$; pour que H soit moyenne périodique, il faut et il suffit que $I \neq 0$; de plus *le spectre de* H *est le cospectre de* I. On peut ainsi associer à chacun des résultats ci-dessus une proposition de théorie spectrale qui apparaîtra le plus souvent comme un théorème d'approximation dans $L^\infty(G)$.

Tout d'abord, si A′ est une partie fermée de $\hat{G}$, elle est égale à son spectre et l'idéal orthogonal à J (A′) est Z (A′). D'autre part, si $g \in \mathfrak{P}(G)$, le spectre de g est celui qu'on a déjà défini au nº 3 du paragraphe 4, c'est-à-dire le support de la mesure de $\mathfrak{M}^1(\hat{G})$ dont g est la transformée de Fourier; enfin, il est clair que, si g est intégrable et bornée dans G, le spectre de G est le support de $\hat{g}$.

Le théorème taubérien de WIENER signifie que, si $H \subset L^{\infty}(G)$ est telle que J (H) ne soit pas réduit à 0, le spectre de H n'est pas vide (théorème de BEURLING [1]). En général, J (H) contient évidemment J (Sp (H)), mais ces deux espaces sont distincts. Toutefois, si U′ est un voisinage de Sp (H) dans G, on a $H \subset J(U')$, c'est-à-dire qu'*on peut approcher faiblement dans* $L^{\infty}(G)$, *et même uniformément sur tout compact, toute fonction de* H *par des polynomes trigonométriques formés avec les éléments de* U′. Dans le cas où G est *compact*, on voit ainsi que J (H) = J (Sp (H)) pour toute partie H de $L^{\infty}(G)$. Plus généralement, si la frontière de Sp (H) est clairsemée (par exemple si Sp (H) est discret), on a $H \subset J(Sp(H))$. Si Sp (H) est *discret*, on peut alors associer à chaque fonction de H un développement formel canonique suivant Sp (H); si de plus $f \in H$ est uniformément continue, f est *presque périodique* [27]; la théorie des fonctions presque périodiques permet d'ailleurs de préciser de nombreuses propriétés spectrales [27], mais il n'existe pas à l'heure actuelle d'étude systématique des rapports qui existent entre la théorie spectrale et la théorie ergodique. Il est permis de croire qu'on pourra encore préciser considérablement les critères indiqués ci-dessus pour qu'un idéal I de $L^1(G)$ soit égal à Z (Cosp (I)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING, A., Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel. *Acta Mathematica*, t. LXXVII (1945), pp. 127-136.

[2] BOCHNER, S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale.* Leipzig Akad. Verlagsgesellschaft (1932).

[3] BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique*, Livre III, Topologie générale (fasc. de résultats). *Actual. Scient. et Ind.*, nº 1196, Paris (1953).

[4] —— Ibid., Livre V, Espaces vectoriels topologiques. *Actual. Scient. et Ind.*, nºs 1189 et 1229, Paris (1953-1955).

[5] —— Ibid., Livre VI, Intégration. *Actual. Scient. et Ind.*, nº 1175, Paris (1952).

[6] CARLEMAN, T., *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent.* Uppsala (1944).