

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DE L'ARITHMÉTIQUE A L'ALGÈBRE ET A L'ANALYSE
MATHÉMATIQUE
Kapitel: Analyse
Autor: Lebesgue, Henri
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32891>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

de changement ni dans la méthode ni dans l'objet de la science et est, du point de vue philosophique, tout à fait accessoire. Pratiquement, au contraire, cela est d'importance essentielle. On ne doit donc pas s'étonner si, pour les contemporains de Viète comme pour nos jeunes élèves, faire de l'algèbre, ce soit essentiellement utiliser une notation. Et cela entraîne en fait une modification extrêmement importante dans le travail intellectuel: s'il n'est pas vrai que l'algèbre-notation dispense de preuves, elle pense cependant souvent à la place de celui qui l'emploie: les maîtres des jeunes élèves peuvent, en algèbre, les dresser à un mécanisme; c'est en arithmétique qu'ils les font raisonner.

Ainsi, la grande nouveauté de l'algèbre, c'est l'emploi des lettres.

Avec Viète, il s'agit, non seulement des nombres nombrants mais aussi des grandeurs, c'est-à-dire, en somme, des nombres réels les plus généraux. Et c'est ce que l'on retint surtout de son œuvre en la perfectionnant, bien que la notion de nombre réel le plus général ne fut élucidée entièrement qu'au XIX^e siècle. Les successeurs immédiats de Viète oublièrent à peu près complètement les précautions qu'avaient prises celui-ci; on ne retint que quelques préceptes relatifs à l'homogénéité. Sans dire ce que c'est qu'un nombre, sans bien préciser comment on attache un nombre aux grandeurs ni ce que signifient les opérations, on ne parle plus que de nombres; seulement ces nombres ne sont plus seulement les nombres rationnels; ce sont les nombres réels généraux. C'est là, si l'on veut délimiter arithmétique et algèbre, ce qui pourrait servir à distinguer ces sciences.

ANALYSE

Mais à quoi réservera-t-on le nom d'analyse? L'arithmétique et l'algèbre ne recouvrent-elles pas toute l'étude du nombre? Nous avons vu que Viète était passé du nombre nombrant aux grandeurs, entraîné par des idées de continuité, d'universalité. C'est de la même façon que, peu de temps après Viète, on appliqua le calcul à de nouveaux éléments. En même temps que se perfectionnaient les notations de Viète des progrès étaient

faits en géométrie par un retour à des modes de raisonnement d'Archimède avec les *indivisibles* de Cavalieri, de Roberval, de Pascal et de Descartes lui-même. Nés du besoin de décomposer une aire ou un volume en éléments ordonnés comme un segment est décomposé en points ordonnés, ils apparaissent comme repérables par des nombres, ainsi que les points eux-mêmes. Il n'est donc pas étonnant qu'on leur ait vite appliqué les notations et les calculs de l'algèbre: ce fut l'analyse des infiniments petits, le calcul différentiel et intégral, l'*analyse infinitésimale*, comme nous disons encore pour l'opposer à l'algèbre ou *analyse algébrique*.

Quelle différence pouvons-nous aujourd'hui apercevoir entre ces analyses? Ce ne peut plus être les objets sur lesquels elles portent. Les fantômes qu'étaient les infiniments petits ou les différentielles se sont évanouis; l'une et l'autre s'occupent des nombres réels.

Quand on examine les groupements de questions que l'on appelle algèbre ou analyse, groupements variables d'un pays à un autre, d'un enseignement à un autre, on remarque vite qu'en algèbre l'emploi de l'infini ou de l'indéfini est masqué! Il faut un peu d'attention pour l'apercevoir, alors qu'il s'étale en analyse où le mot *limite* revient à chaque ligne.

Pour atteindre le nombre en général, on effectue une suite indéfinie d'opérations d'approximation. On sait que cela arrêta les Grecs et qu'aujourd'hui encore certains sont troublés par cette intervention de l'infini. Pourtant nous utilisons tous sans scrupule et sans peur la notion de point; or les stades successifs d'approximation des nombres sont en exacte correspondance avec les « rapetissements » qui font passer de l'idée de corps à celle de point; parler de points ou de nombres, c'est parler d'une même chose en deux langues différentes, décrire sous deux aspects une même notion qui exige impérieusement la considération de l'infini. On ne peut donc raisonnablement condamner l'une des façons de parler et admettre l'autre!

Si les Grecs ont eu l'impression d'avoir écarté l'indéfini, c'est qu'ils ont regardé le point comme une notion première, une donnée intellectuelle sans se soucier de son origine physique. Si Viète ne parle pas d'indéfini ou d'infini, c'est qu'il admet

comme claires les notions de longueur, aires, volumes et les calculs sur ces notions. Si les algèbres modernes ne font aucun appel à l'infini, c'est qu'elles s'occupent d'éléments abstraits non précisés et d'opérations sur ces éléments dont on sait seulement qu'elles possèdent telle ou telle propriété. L'éclaircissement de toutes ces bases de l'étude et le rattachement des éléments et des calculs au nom de physique quand on les particularise, quand, par exemple, il s'agit de nombres réels, pourra exiger l'emploi de l'infini, mais l'algèbre n'en a cure: elle ne s'occupe, elle, que des conséquences obtenues par des calculs finis à partir des prémisses, calculs qui, bien entendu, ne sont qu'exceptionnellement des calculs numériques; le plus souvent, les opérations se réduisent à l'association toute intellectuelle d'un élément résultat du calcul aux éléments donnés de ce calcul.

Cette façon de définir une algèbre convient assez bien pour caractériser les ensembles de considérations rassemblées ordinairement comme constituant l'algèbre ordinaire, ou des nombres réels. L'Analyse apparaît alors comme devant grouper tout ce qui est au-delà des calculs finis, tout ce qui exige des appels répétés à la notion d'infini, au passage à la limite, à l'emploi de suites infinies d'opérations etc. Les calculs qu'on y fera auront une signification numérique, mais seulement comme calculs d'approximation.

Bien entendu cette distinction entre algèbre et analyse est vague et sujette à bien des objections. On peut être choqué, par exemple, par le fait que l'un des théorèmes fondamentaux de l'algèbre, le théorème de d'Alembert, soit à classer dans l'analyse. Mais c'est un fait que ce théorème est si différent de la plupart des considérations algébriques qu'on préfère souvent l'admettre sans démonstrations dans les livres d'algèbre. On pourra noter aussi que le classement de certaines recherches sera bien difficile: la démonstration de la transcendance de π sera-t-elle de l'analyse à cause du nombre π , de l'algèbre à cause de la considération de polynômes, de l'arithmétique parce que ces polynômes sont à coefficients entiers? Mais ces remarques et autres analogues n'enlèvent rien à la valeur des distinctions que nous venons d'établir entre arithmétique, algèbre et analyse; elles nous

mettent seulement en garde contre toute exagération : propriétés arithmétiques, algébriques, analytiques sont voisines mais celles que l'on groupe dans une de ces sciences sont encore plus voisines.

POINT DE DÉPART D'UN LIVRE D'ANALYSE

Parce que nous ferons de l'analyse, il serait puéril et dangereux de prétendre ignorer l'arithmétique et l'algèbre et de ne faire aucun appel à ces chapitres de la science mathématique. Bien au contraire. En analyse, nous devons aller au-delà des calculs numériques effectuables, mais c'est de ces calculs qu'il nous faudra partir et à ces calculs qu'il nous faudra aboutir ; en partir, car toute découverte qui s'est révélée utile s'est d'abord faite pour un cas particulier justiciable d'un calcul, ou encore a été observée au cours d'un calcul ou suggérée par lui ; y aboutir, car toute application reposera sur les approximations numériques finalement obtenues.

Ainsi, les points de départ sont des « faits de calcul » qui forment lien entre l'algèbre ou l'arithmétique et l'analyse. J'ai essayé de le faire sentir dans ce livre. Je dis seulement « faire sentir » car les points de départ véritables sont souvent inconnus, et, quand on les connaît, on ne peut les exposer que sous une forme si modifiée qu'on s'écarte toujours beaucoup de la vérité historique ; il faut en effet traduire en langage et notations modernes les écrits des auteurs anciens, abréger des calculs trop longs et d'autre part les compléter pour atteindre la correction logique. Je me suis donc borné à ne présenter comme des points de départ que des faits particuliers qui avaient été effectivement obtenus avant d'être incorporés dans une théorie générale, me refusant par contre à remplacer un raisonnement par une constatation de calcul comme on le fait parfois pour des raisons de brièveté. J'ai tenu à le faire pour bien marquer l'importance qu'a, dans le développement de la science, la découverte des faits particuliers.

LES THÉORIES GÉNÉRALES

En mathématiques, le progrès part du fait particulier ; c'est d'abord quelque chose qui surprend, que l'on dit être une obser-