

# L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DANS LA CORRESPONDANCE DE HENRI LEBESGUE

Autor(en): **Leconte, Th.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32895>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DANS LA CORRESPONDANCE DE HENRI LEBESGUE

La place qu'ont value à HENRI LEBESGUE (1875-1941) dans la lignée des plus grands mathématiciens, la profondeur de ses recherches, la noblesse de son caractère, ainsi que son immense labeur poursuivi jusque sur son lit de mort, est connue.

Et l'on sait particulièrement que, dans le problème de l'intégration, Lebesgue, successeur direct de Cauchy et de Riemann, rendit son nom illustre, à vingt-cinq ans, par le trait de génie le plus rare. L'intégrale de Lebesgue, devenue si rapidement classique et simple, étonna profondément, vers 1900, le monde savant; et les meilleurs esprits pensent que cette notion sortirait à peine aujourd'hui, avec cinquante années de retard, des limbes de la pensée, sans la force créatrice de Lebesgue, qui, d'ailleurs, ne vit pas du premier coup l'importance des remarques qu'il présentait. Il fallut la clairvoyance de M. ÉMILE BOREL pour avoir raison de ses hésitations et de sa modestie.

A côté de pareils dons, Lebesgue a montré un amour infini des choses de l'enseignement dans ses cours de Sèvres, dans de nombreuses notes pédagogiques, dans d'admirables opuscules sur les coniques et sur la mesure des grandeurs, et plus encore dans une action personnelle inlassable, faite de bonté et de dévouement, sur les maîtres qui s'adressaient à lui ou dont il remarquait les articles. Lui, pour qui écrire représentait un effort douloureux, n'a pas résisté à l'appel d'un professeur en mal de progrès pédagogique. Les très longues lettres qu'il a ainsi écrites forment un trésor heureusement conservé par les destinataires.

M. J. ITARD a pris la très heureuse initiative d'en rassembler quelques-unes et de les joindre, dans une première publication, à celles qui lui ont fait éprouver personnellement la bienveillance de Lebesgue. Que de professeurs a-t-il ainsi encouragés! M. P. ROBERT, j'en suis sûr, sera heureux que je rappelle la

sympathie avec laquelle Lebesgue a suivi sa découverte des droites focales d'un cercle, et moi-même, dont la vie a été enrichie de son amitié, n'ai-je pas le devoir de dire qu'après m'avoir « désenglué » de l'esprit d'érudition, il s'est penché sur de modestes moyens pour me faire connaître aussi la joie de la recherche.

Les lettres de Lebesgue sont familières, ironiques, remplies de formules lapidaires comme celle-ci : Le secondaire escamote le nombre. Elles contiennent des vues magnifiques sur un enseignement qu'il aurait voulu moins analytique, moins directement philosophique, plus intuitif, plus dense aussi et imprégné d'une maïeutique fort éloignée de la « logique qui enfonce les portes ouvertes ».

La chose remarquable, sur laquelle il y a lieu d'insister ici, est que les écrits de Lebesgue sur l'enseignement ne cessent pas de mêler la recherche de la meilleure présentation au développement des idées, à l'histoire des idées, et, s'il le faut, à la contribution des hommes. En cela, ils nous montrent un aspect moins connu de l'activité scientifique de Lebesgue, celui où son esprit de pénétration et son esprit de justice font de lui un véritable historien de la science.

Il sera attachant, il sera précieux de publier, non seulement celles de ses lettres qui touchent à l'histoire des idées, comme on commence à le faire aujourd'hui, mais aussi ses quelques écrits d'histoire des sciences, par exemple les très beaux et très personnels portraits de Roberval et de Ramus qu'il a tracés dans sa leçon d'ouverture au Collège de France.

Th. LECONTE.

*Extraits de lettres adressées à M<sup>lle</sup> Budon*

Paris, 1<sup>er</sup> mars 1930.

« Ce sur quoi je désirais attirer votre attention, c'est l'histoire de l'acquisition d'un fait mathématique. C'est toujours l'histoire d'un lent et long travail collectif. Quand nous donnons un renseignement historique, il se compose d'un nom, d'une date,

d'un titre de mémoire au besoin et c'est tout. Nous présentons les choses comme si la vérité sortait de l'onde dans sa claire et radieuse beauté; et toute armée. Mais non, la vérité ne brille qu'aux yeux qui l'ont longtemps cherchée; assez longtemps pour avoir mérité de la voir. Et ceux-là seuls devinent sa puissance, sa force, son pouvoir générateur qui l'ont longtemps et amoureux-ement étudiée. Souvent ces longs efforts de pensée n'ont laissé aucune trace matérielle, nous pouvons les soupçonner, c'est tout. Pour les vérités particulièrement fécondes, qui, toujours, furent particulièrement lentes à conquérir, il n'en est plus de même; on peut, dans les anciens écrits, suivre les travaux d'approche, voir les succès, les défaites; comprendre, après coup, les raisons de ces succès, de ces défaites, mettre en évidence l'idée fausse, le préjugé souvent, qui avait trompé, la vue perspicace et intelligente qui a fait découvrir la bonne voie. Essayer de faire cela pour une proposition particulièrement importante, pour une notion primordiale serait, je crois, essayer de faire de la vraie histoire des sciences, de la vraie philosophie des sciences. Car cela intéresserait et servirait ceux qui s'occupent de mathématiques et non pas seulement les érudits ou les philosophes de métier; et je crois que c'est là le seul critère pour reconnaître la vraie histoire, la vraie philosophie d'une science.

» Je pensais à cela — et à vous — en lisant un livre très curieux de Niels Nielsen, professeur à l'Université de Copenhague: *Géomètres français sous la Révolution* (Levin & Munksgaard, éditeur, Copenhague). M. Nielsen, passionné pour tout ce qui touche à la révolution française, ayant à écrire une sorte d'écrit de fête, de Discours d'apparat, pour une séance de rentrée de faculté, écrivit un dictionnaire biographique des géomètres français vivant sous la Révolution. Malgré tout ce qu'on peut dire contre ce livre, il reste prodigieusement captivant, à mon avis, si, au lieu de le lire, on rêve à son sujet. On y découvre alors la trace de la faiblesse de l'esprit humain, qui n'a pas permis aux mieux doués de comprendre pleinement, complètement, d'éviter les erreurs, les enfantillages, les sottises. Et quand, pourtant, on constate qu'on s'en est sorti, que la vérité a été conquise, on est fier de cette intelligence humaine — mais on n'est plus vaniteux — et on comprend tout le prix de ces vérités, humbles si vous

voulez, profondes aussi pourtant, qui traînent maintenant dans les cours et qui sont les plus belles conquêtes humaines.

» Je voyais dans le même livre que Montucla, avant d'écrire son gros ouvrage sur l'histoire des mathématiques (qui a été le point de départ de toutes les histoires des mathématiques) avait écrit une histoire de la quadrature du cercle. Et je pensais que c'est cela qu'il faudrait imiter en étudiant l'histoire, l'évolution de problèmes particuliers.

» En voyant aussi dans ce livre un seul nom de femme, mais un très grand nom d'ailleurs et que Nielsen ne met pas à son rang, je pensais qu'il y aurait dans ce genre d'étude une ressource pour les femmes qui, comme vous, je crois, désirent continuer à travailler intellectuellement et qui pourtant, par leurs études, par les nécessités de la vie se trouvent mal préparées à la recherche mathématique. Celle-ci, au reste, n'est fructueuse que pendant un temps, du moins mis à part un nombre extrêmement petit de créatures humaines; et alors qu'on se sent plus armé par ses connaissances, plus apte à tout comprendre, à tout embrasser, on se sent plus incapable de créer.

» Il me semblait aussi que ce genre de travail pourrait peut-être se révéler plus adapté aux qualités féminines. Il y faudrait de l'ordre et de la patience et de la persévérance — pour la partie recherches érudites — et des facultés de compréhension humaine. J'ai surtout admiré à Sèvres cette faculté féminine qui permet d'entrer dans la pensée d'autrui, de la faire sienne sans avoir à la rebâtir comme un homme serait obligé de le faire. On dit parfois, avec insolence, que les femmes adoptent des idées toutes faites; c'est vrai souvent; mais il y a aussi chez elles une aptitude à vivre en harmonie, en sympathie complète avec un autre être, à sentir ce qu'il sent, à comprendre ce qu'il comprend. Sentir ce qu'un autre sent, un homme en est aussi capable; mais comprendre par sympathie, il ne le peut. Il y a pourtant là un moyen d'arriver à comprendre (qui n'est pas le moyen logique certes, mais celui-ci n'est pas le seul) singulièrement heureux, puisqu'il inscrit la vérité au plus profond de l'être en lui donnant un caractère affectif.

» Il faudrait aussi de grandes qualités scientifiques. Pas précisément les plus utiles pour la recherche (ce je ne sais quoi

apparenté à la folie et qui semble bien faire le génie), mais l'intelligence. Comprendre l'importance, la puissance de chaque chose.

» Dans le livre de Nielsen on voit que, pendant un siècle, le théorème de d'Alembert ne fut pas celui que vous connaissez : toute égalité algébrique a au moins une racine. Non, ceci, c'était le 2<sup>e</sup> théorème de d'Alembert, le 1<sup>er</sup>, le fondamental, était celui-ci : Toute imaginaire est de la forme  $a + bi$ . Et cela avait un sens, cela signifiait : continuons à utiliser les signes de calcul quand ils n'ont pas de sens, tout ce que nous trouverons pourra être réduit (par des transformations elles-mêmes dépourvues de sens) à la forme  $a + bi$ . Et toute cette association de symboles sans significations servira à quelque chose et ne trompera pas.

» N'y a-t-il donc pas moyen d'arriver à des erreurs en écrivant ainsi des choses dépourvues de sens ? Oh ! si. Et les gens du XVIII<sup>e</sup> siècle en ont trouvé. Pourtant ils ont persévéré à croire au théorème fondamental (!!!) de d'Alembert et ont abouti à la notion claire d'imaginaire. Écrire une histoire de la notion d'imaginaire ne serait-ce pas beau ? et passionnant ? C'est d'ailleurs là, sans doute, un sujet trop vaste, trop ambitieux pour un début. Mais on pourrait le restreindre. Et rien que dans le livre de Nielsen, voici d'autres sujets de monographies :

» La résolution algébrique des équations.

» Les problèmes des cercles tangents (dans la résolution de ces petits problèmes, les plus grands noms se rencontrent et on a aussi la surprise de voir la place que la géométrie analytique a joué dans ces questions).

» La géométrie des quadriques.

» La notion générale de fonction et l'histoire souvent ébauchée, jamais écrite, de la querelle des cordes vibrantes.

» L'histoire, écrite en partie par Borel, de la notion de séries convergentes et divergentes et des essais d'utilisation de celles-ci.

» Et il y aurait bien d'autres sujets à tirer de ce livre — et d'autres. »

Paris, 24 octobre 1932.

« Je n'ai pas oublié le travail que vous m'avez remis <sup>1</sup>...

» Une première chose frappe, c'est que vous ne faites presque appel qu'aux sources citées par N. Nielsen; or, d'après le plan même de celui-ci, il n'a recherché que les auteurs français ou en relations avec des Français. Pour que votre essai « sur quelques-uns des efforts » pour interpréter les imaginaires devienne une étude sur cette interprétation, il vous reste bien du travail à faire. Chercher les auteurs ailleurs qu'en France, vous en citez quelques-uns, les lire; mais aussi en dénicher d'autres (l'histoire des mathématiques en allemand, par M. Cantor, vous y aiderait sans doute). Puis, et surtout, à côté des travaux sur votre sujet il y a tous les travaux où les imaginaires sont utilisées dans lesquels il faudrait découvrir sans les lire entièrement, grand Dieu, l'évolution des idées sur les imaginaires. Car si les savants, comme Laplace, parlaient aussi mal de la théorie abstraite des imaginaires que le faisaient des professeurs comme Garnier, ils les utilisaient de mieux en mieux, en tiraient beaucoup et chaque résultat nouveau renseigne quelque peu sur l'outil qui l'a fourni.

» Votre sujet devrait d'ailleurs être un peu élargi. L'important n'est pas la représentation géométrique des imaginaires, mais la compréhension des imaginaires et la légitimation logique de leur emploi; la représentation géométrique n'a, au début, que l'importance de fournir précisément cette légitimation logique. De sorte que dans « l'étude », il nous faudrait nous occuper tout aussi bien des autres légitimations dont parle Cauchy que de celle d'aspect géométrique que vous citez.

» Je dis donc que les savants comprenaient de mieux en mieux les imaginaires, sans s'en douter d'ailleurs; cela, que j'affirme gratuitement, est à prouver; et ce serait bien intéressant de le prouver, car rien n'est plus captivant que de suivre la marche vacillante de la pensée dans l'analyse d'une question qui a paru au début au-delà de l'intelligibilité humaine et qui, après, semble enfantine. Or je dis que les savants comprenaient

<sup>1</sup> M<sup>lle</sup> J. BUDON, Sur la représentation des nombres imaginaires; analyse de quelques mémoires parus de 1795 à 1820. *Bulletin des Sciences mathématiques*, année 1932-33, Gauthier-Villars, Paris.

de mieux en mieux: comment, sans cela, s'expliquer que Abel ait pu parler d'intégrales abeliennes et de son fameux théorème sur ces intégrales, que Jacobi ait pu découvrir la double périodicité des fonctions elliptiques, qu'ils aient pu se rencontrer si souvent dans leurs études et que Gauss, de son côté, ait obtenu à lui seul à peu près les résultats des deux autres, si ces résultats n'avaient pas été, en quelque sorte, mûrs et prêts à cueillir, amenés à ce point par les connaissances acquises sur les imaginaires, dont le rôle ici est prépondérant ?

» Certes il s'agit-là de travaux assez tardifs, 1828 à peu près, mais, d'une part, il y en eut d'autres auparavant, moins brillants, mais tout aussi caractéristiques des progrès faits dans l'emploi des imaginaires; et d'autre part, leurs auteurs, Scandinaves ou Allemands, n'avaient subi aucune influence d'Argand (ni de Wessel), et pourtant ils raisonnaient juste sur des sujets où il nous semble volontiers qu'on ne peut rien voir sans la représentation géométrique des imaginaires.

» Donc, dans la suite de vos recherches, je vous verrais volontiers scrutant les mémoires pour y découvrir et nous faire connaître le lent travail des esprits que les livres d'enseignement, ou même des mémoires spéciaux comme celui d'Argand, ne montrent pas. Ils en montrent seulement l'effet. Aussi que vous poursuiviez vos recherches dans les livres d'enseignement — Bezout, Mauduit, Lacroix (celui-ci donne en somme le tableau de l'analyse avant Cauchy; que dit-il des imaginaires ?). Puis, ayant mieux établi le bilan avant l'explication logique des imaginaires, vous pourriez suivre l'enseignement et accessoirement la recherche jusqu'à aujourd'hui. Pendant longtemps encore bien des ouvrages omirent toute légitimation logique des imaginaires; d'autres en donnèrent de fort contestables, et la représentation géométrique passe au second plan, quand elle ne fut pas laissée de côté tout à fait. Ceci n'est pas étonnant, car, à part quelques contours d'intégration dessinés par Cauchy, la représentation des imaginaires n'était en effet qu'une représentation, non quelque chose de capital dans les recherches mathématiques, et ne le devint qu'avec Riemann.

» Ou bien vous pourriez remonter le temps, et tâcher de renouer l'époque que vous avez déjà étudiée, et que vous aurez



étudiée plus complètement à celle de Cardan, qui paraît être l'époque de l'invention des imaginaires; et vous nous dévoileriez en particulier les idées d'Albert Girard dans *Inventions nouvelles en l'Algèbre* (où il s'agit d'imaginaires). Ceci serait moins travail de mathématicien, plus travail d'historien que l'étude jusqu'à nos jours; ce n'en serait pas moins intéressant, au contraire.»

*Extraits de lettres adressées à M. Itard*

14 juin 1938.

« Puisque l'occasion s'en présente, que pensez-vous de ce passage de la lettre de Diderot *Sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient*: « Saunderson, mathématicien aveugle de Cambridge, est l'auteur d'un ouvrage très parfait dans son genre. Ce sont des éléments d'Algèbre où l'on n'aperçoit qu'il était aveugle qu'à la singularité de certaines démonstrations qu'un homme qui voit n'eût peut-être pas rencontrées. C'est à lui qu'appartient la division du cube en six pyramides égales qui ont leurs sommets au centre du cube et pour base chacune une de ses faces. On s'en sert pour démontrer d'une manière très simple que toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur » ? C'est moi qui ai souligné *toute*; cette affirmation générale exclut (Bricard, Dehn) qu'il s'agisse d'une démonstration par découpage. Diderot s'est-il tout simplement trompé — ce qui me paraît le plus probable — ou à quoi fait-il allusion ? <sup>1</sup> — A l'occasion de Frézier et Monge <sup>2</sup> — feuilletant, le 30 mai, à Cracovie,

<sup>1</sup> M. Lebesgue a publié la réponse de M. Itard relative au passage de Diderot: Sur l'équivalence des polyèdres. *Annales de la Société polonaise de mathématiques*, t. XVII, 1938.

« Diderot se trompe sur Saunderson. L'algèbre de ce dernier est sortie en 1740. En 1741, Clairaut publiait sa *Géométrie* où il emploie le même procédé... D'Alembert aura dit, je le suppose, que son ennemi intime Clairaut n'avait fait que reprendre une idée de Saunderson et Diderot aura sauté sur l'occasion. Mais Sébastien Le Clerc, en 1690, justifie dans sa *Géométrie* le facteur  $1/3$  par la même considération... Le Clerc était graveur et professeur à l'Académie de peinture où il était du parti de Lebrun et donc adversaire de l'école de Desargues. Il était donc loin d'être aveugle ! Je ne sais même pas, vu ses origines lorraines (il est né à Metz), s'il ne faudrait pas voir dans ses travaux des influences de Dürer. En tout cas la méthode du cube est une invention de peintres, de sculpteurs, de gens qui voient. »

<sup>2</sup> J. ITARD, *Géométrie dans l'espace*, Léon Eyrolles, éditeur, Paris. Lectures: Un texte de Frézier, p. 114; un texte de Monge, p. 162. Imprimerie de l'Université, Cracovie.

un manuscrit de Pudlowski (1597-1645), je tombe sur l'épure de la section d'un cône de révolution à axe vertical par un plan debout exactement telle que la ferait un de nos élèves par le procédé des sections horizontales. »

17 juin 1938.

« Merci de vos renseignements sur Saunderson <sup>1</sup> et Diderot. Il est clair que Diderot ne connaissait pas le précédent de Le Clerc et qu'il doit n'avoir, en effet, voulu faire allusion qu'à cette détermination du facteur  $1/3$ . Évidemment la décomposition du cube est une décomposition de voyant; Diderot, comme tous ceux qui écrivent sur les aveugles et surtout comme les aveugles qui écrivent sur leur cas, s'est laissé entraîner, en parlant des suppléances de sens, à insinuer que la cécité est une supériorité. Alors que, puisque tant de sens doivent être développés, et extraordinairement, pour suppléer quelque peu à la vue, on devrait au contraire en conclure qu'être aveugle est une effroyable calamité !

» Puisque Pudlowski vous intéresse, il utilisait déjà un signe d'implication et avait quelque prescience de l'algèbre de la logique (entre nous, toujours à créer).

» Un certain Grzebski (astronome) éditait en 1566 une géométrie en polonais; avant, Klos (1538) et Wojewódka (1553) avaient donné des arithmétiques en polonais. »

14 février 1939.

« Savez-vous que les « définitions » de Fourier dont parle le dernier numéro de *L'Enseignement Scientifique* <sup>2</sup> ont été utilisées par Leibniz. Celui-ci, désireux d'être rattaché à l'Académie des Sciences sans cependant quitter l'Allemagne, demande à Huygens d'intervenir en sa faveur (vous trouverez cela je crois dans la correspondance de Leibniz), de le faire agréer comme une sorte d'informateur, de correspondant. Et, de fait, Leibniz invente ce jour-là les correspondants de l'Académie.

<sup>1</sup> Voir, pour ces renseignements, note 1, p. 263.

<sup>2</sup> *L'Enseignement scientifique*, 12<sup>e</sup> année, n° 113, 25 déc. 1938, Eyrolles, Paris.

» A l'appui de sa requête il parle à Huygens de ses pensées sur l'*Analysis Situs*. Pensées bien vagues et confuses. Leibniz, comme toujours, pense à tout à la fois et ne parvient pas à se borner, donc à préciser. Il voudrait une analyse qui exprime *situm* comme l'Algèbre exprime *magnitudinem* (je me rappelle ces termes), il parle de description de plantes, d'animaux, ce qui serait bien de la topologie, mais il y mêle des choses métriques (description et théorie de l'arc-en-ciel), de l'analyse combinatoire (il s'occupera de la notation du cavalier aux échecs), de la description et notation des machines (en ancêtre de Babbage) et de la géométrie absolue. En fait c'est celle-ci à peu près uniquement qu'il a entrevue; il n'est pas satisfait des coordonnées de Descartes et veut une notation directe des situations métriques relatives dans l'espace; et, s'il oppose *situm* et *magnitudinem*, ce n'est nullement parce qu'il a fait notre distinction entre relation de situation et relation de grandeur, mais parce que l'algèbre des grandeurs est, par cela même, une algèbre des situations précisées métriquement, mais seulement directement pour la droite, et que ce qu'il désire c'est une algèbre analogue pour l'espace (ou le plan), une algèbre métrique à plusieurs dimensions.

» Ceci explique que le mémoire annexé à la lettre à Huygens débute par une notation, je ne sais plus laquelle, de l'égalité de deux distances — ce qui est en désaccord absolu avec le sens que nous donnons à la dénomination *Analysis Situs* imaginée par Leibniz. Et il s'en sert précisément pour noter une sphère par quelque chose comme  $Oda = R$ , le plan médiateur de A et B par  $Ada = Bda$ , une droite par  $Ada = Bda = Cda$ . C'est Euler le premier qui a eu une vision nette de la distinction entre situation et métrique <sup>1</sup>. »

23 février 1939.

« Votre article sur l'évolution de l'enseignement et le choix des notions et définitions dans les auteurs des siècles passés <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dans sa réponse M. Itard, signalant les propositions sur le plan et la droite dans la *Géométrie* de Sauveur, et celles sur la droite dans la *Géométrie* de Port-Royal, émettait l'hypothèse d'influences parisiennes sur Leibniz.

<sup>2</sup> J. ITARD, La *Géométrie* de Port-Royal. *L'Enseignement mathématique*, 38<sup>e</sup> année, 1939 et 1940, n°] 1-2-3 (paru en mars 1940), Gauthier-Villars, Paris; Georg, Genève.

sera le très bien venu, comme éventuellement celui sur les nombres imaginaires. Il s'agit là de choses trop ignorées, et très ignorées, et les redites inévitables en matière d'histoire n'ont aucun inconvénient.

» — Pour Leibniz, votre hypothèse, qu'il ait été influencé par des opinions parisiennes, est certes la plus vraisemblable; mais il ne faudrait pas exclure la possibilité qu'une même idée aussi simple ait germé spontanément dans divers cerveaux. Certains, plaçant l'idée, la notion, de longueur comme notion primitive, ont construit des définitions à partir de là. Ce n'est pas tout à fait ce que fait Leibniz; il ne cherche pas à définir la sphère, le plan, la droite, mais à en écrire une sorte d'équation absolue; il le fait à l'aide d'égalités de longueurs pour lesquelles il a inventé un symbole et dont naturellement ces équations sont précisément l'écriture, avec ses symboles, des définitions des autres. Mais pour Leibniz, ces équations, si elles étaient bien la traduction de propriétés caractéristiques des droites, plans et sphères (donc de propriétés qui auraient pu être prises comme définitions logiques), étaient relatives à ces êtres connus antérieurement et peu importe comment.

» Il y a donc une légère nuance, que je précise, car je vous ai parlé de Leibniz à l'occasion des définitions de Fourier, mais je n'ai pas précisé que Leibniz, lui, ne posait pas des définitions, mais des équations. Il ne rédige pas les premières pages d'un manuel, il avance à pas de géant dans la science (il le croit du moins). »

Extrait de *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*. T. I, n° 3. Janvier-Mars 1948. Paris, Presses Universitaires.

*Extraits de lettres adressées à M<sup>lle</sup> Félix*

23 décembre 1939.

« ... Vos questions sont toutes naturelles: pourquoi considérer des congruences ? pourquoi prendre le quotient par  $y^2 + 1$  ? Tout cela deviendrait clair et naturel et non pas logique si l'on

racontait la genèse du procédé: Au XVIII<sup>e</sup> siècle on s'est beaucoup occupé de la résolution d'équations en nombres entiers et en nombres rationnels. Cela a donné des résultats arithmétiques fort jolis, importants même, et cette étude était indiquée puisque toute racine d'une équation algébrique doit pouvoir être approchée par une racine rationnelle d'une équation voisine de celle à résoudre.

» Pour ces raisons, du XVI<sup>e</sup> au XIX<sup>e</sup> siècle, on a beaucoup envisagé les congruences qui interviennent tout naturellement dans les résolutions en nombres entiers. Tous les géomètres connaissaient bien les théorèmes relatifs aux congruences et étaient habiles à les manier. D'autre part la résolution des équations algébriques conduisait à regarder ce que l'on pouvait résoudre si l'on envisage, non seulement les entiers, mais aussi une irrationnelle, une racine  $y$  de  $P(y) = 0$ , ( $P(y)$  polynôme à coefficients entiers); on avait ainsi souvent à substituer  $y$  dans un polynôme  $A(y)$ , le résultat était  $R(y)$ , reste de la division de  $A$  par  $P$ ; [ $A(y) P(y) Q(y) + R(y)$ ]. On se servait donc aussi des congruences par rapport à un polynôme.

» Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, à l'époque de Cauchy, l'intérêt, l'utilité des imaginaires étaient certains; elles conduisaient, *du moins le plus souvent*, à des résultats vrais. Cauchy n'avait qu'à expliquer pourquoi; cette explication donnerait d'ailleurs sans doute les limitations indispensables pour que les résultats soient *toujours* corrects. Et ainsi Cauchy est conduit à rechercher un procédé qui *prouve logiquement* les résultats que l'on obtiendra tant qu'on ne fera qu'employer les quatre opérations fondamentales. Au lieu de se contenter de vérifier que si l'on part d'égalités  $a + ib = a' + ib'$  (qui signifient  $a = a'$ ,  $b = b'$ ) les quatre opérations ne permettront d'en déduire que des égalités exactes (comme je vous l'ai fait à Sèvres une année), il pensa au procédé des congruences parce qu'il lui était familier comme aussi à ses contemporains, et c'est là l'origine du procédé qu'expose (...), procédé qui donne la preuve logique mais paraît n'avoir pu être imaginé que par un fou — de génie peut-être, mais fou, fou. Ce procédé ne peut être utilisé pour *conduire* aux imaginaires; elles doivent être connues pratiquement auparavant comme dans la vérification que je vous rappelais.

» Les seuls exposés qu'on ait donnés des imaginaires et qui prétendent y conduire sont les procédés utilisant la représentation des imaginaires; historiquement ils sont faux et il n'y a pas besoin d'y regarder de bien près pour reconnaître que les imaginaires doivent être connues antérieurement pour qu'on puisse penser à l'opération (baroque) de la multiplication; une adresse escamoteuse permettra de faire passer la muscade, certes, mais l'emploi d'une telle adresse est tout le contraire de ce qu'il faut faire pour comprendre vraiment.

» La précision logique remise en honneur au début du XIX<sup>e</sup> siècle par Gauss et Cauchy est venue à son heure; les contradictions apparaissaient partout. Après quelques 140 ans de précision la roue a tourné, on est prêt à sacrifier la logique à l'imagination; sans doute la logique oblige parfois à des détours ou à des artifices comme cet emploi des congruences, surtout à des longueurs quand on veut lui associer l'explication des actes des mathématiciens comme je viens d'essayer de le faire pour les imaginaires, et non se borner à dire: « on a fait cela et cela a réussi ». Il faudrait faire un double exposé, d'abord montrer qu'on a construit peu à peu sans bases solides, poussé le plus souvent par des nécessités concrètes, puis reprendre logiquement les questions. Faites bien attention que, contrairement au sens qu'on donne au mot logique dans « marche logique », la marche, la construction, l'invention n'est jamais du domaine logique. La logique donne *toutes* les conséquences des prémisses, mais ne guide nullement dans le *choix* de ces conséquences; ce choix se fait en vue d'un but *connu* à atteindre, d'un résultat *deviné, escompté*; la recherche première ne peut donc être purement logique et quand on expose logiquement comme on le fait ordinairement, on est obligé de faire appel à l'autorité: « Posons... » disent avec raison vos élèves.

» En principe, les Instructions qui refoulent au second rang la logique n'ont pas tort; mais où s'arrêter? C'est là, vous avez raison, la difficulté. Il faudrait ne pas sacrifier la logique, l'exposer, elle aussi, mais en second. Or, comme vous le dites, déjà les programmes, avec un seul exposé, sont trop enflés...

» Pour moi, je regrette de ne pas avoir d'enseignement à faire car, pour ce qui est de « faire » des mathématiques comme

vous m'y conviez, j'y réussis bien mal. Vous ne vous doutez pas ce que c'est qu'être dans sa 65<sup>e</sup> année ! et dans une 65<sup>e</sup> année si triste ! Par la difficulté que j'éprouve à fixer ma pensée sur un obstacle à franchir, je rejoindrai bientôt tout à fait vos élèves les plus distraits et les moins tenaces.

» Recevez, Mademoiselle, tous mes souhaits pour une année qu'on peut espérer, qu'on doit espérer, pleine de surprises agréables puisqu'elle se présente sous un jour sinistre. »

13 janvier 1941.

« ... Au moment de reprendre mon cours je devais bien une pensée à ceux et celles qui ne peuvent reprendre le leur. Si le Collège de France a du charbon pour empêcher les auditeurs d'être congelés (malgré la parole enflammée des maîtres) je reprendrai mon cours mardi 21, en effet.

» C'est peut-être la faute de Sèvres, en tout cas Sèvres y est pour beaucoup, mais les mathématiques en tant que résultats m'intéressent de moins en moins; ce qui me passionne, c'est le travail de pensée humaine qu'exige une recherche mathématique. De sorte que je traiterai cette année d'un sujet que j'ai déjà abordé de diverses manières « Les constructions par la règle », mais en suivant de plus près le développement historique de la question. Les procédés qui ont réussi apparaissent alors comme enfantins, on s'étonne qu'on n'y ait pas pensé immédiatement ou qu'y ayant pensé on n'en ait pas vu les conséquences. Cela enseigne la modestie; surtout quand on constate qu'après des siècles, retrouvant les mêmes difficultés sous un angle quelque peu différent, on se remet à piétiner à nouveau comme jadis. En réalité, nous ne résolvons à peu près jamais les difficultés qui ont tout d'abord fait trébucher, nous nous familiarisons avec ces difficultés et finissons, bien tard, par en prendre notre parti, par ne plus essayer de ruser avec elles. »

---