

L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS

Autor(en): **Braconnier, Jean**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32898>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS

Seconde partie

PAR

Jean BRACONNIER, Lyon

§ 7. La transformation de Fourier-Laplace

1. Il est naturellement intéressant d'étudier d'autres « caractères » du groupe G , que les éléments de \hat{G} . Ainsi, on dira qu'une représentation continue de G dans le groupe multiplicatif des nombres complexes $\neq 0$ est un *caractère généralisé* du groupe G ; il est clair que si un caractère généralisé de G est borné, il appartient à \hat{G} . L'ensemble des caractères généralisés de G , muni de la multiplication usuelle des fonctions et de la topologie de convergence compacte dans G est un groupe topologique abélien et complet. Il est facile de construire les caractères généralisés de G : remarquons d'abord que le groupe des caractères généralisés de G est le produit direct du groupe \hat{G} et du groupe des caractères réels et > 0 de G , de telle sorte qu'il suffit d'étudier ces derniers caractères. Désignons alors par $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel formé des *représentations réelles* (i.e. dans \mathbf{R}) et continues de G ; dans $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$, les topologies de convergence simple et de convergence compacte coïncident et, muni de l'une de ces topologies, $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ est un espace de BANACH. L'application $l \rightarrow \exp(2\pi l)$ est un isomorphisme du groupe *additif* de $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ sur le groupe des caractères > 0 de G et, par suite, $(\hat{x}, l) \rightarrow \hat{x} \exp(2\pi l)$, est un isomorphisme de $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ sur le groupe des caractères généralisés de G .

Les caractères généralisés ont été introduits par G. MACKEY [20] et J. RISS [28].

Par exemple, l'espace $\text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ s'identifie avec \mathbf{R}^n , car toute représentation réelle et continue de \mathbf{R}^n est une forme linéaire continue et, par suite, de la forme $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1$ où $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{R}^n$; chaque caractère généralisé de \mathbf{R}^n est donc de la forme $\mathbf{x} \rightarrow \exp(2i\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 2\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1)$; on identifiera le groupe des caractères généralisés de \mathbf{R}^n avec le groupe \mathbf{C}^n , en associant à $\mathbf{y} + i\mathbf{y}_1$ le caractère décrit ci-dessus.

Soit alors μ une mesure sur G ; l'ensemble $\Gamma(\mu)$ des $l \in \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ tels que $\exp(2\pi l) \mu \in \mathcal{M}^1(G)$ est convexe; on appelle transformée de FOURIER-LAPLACE de μ la transformée de FOURIER de la mesure $\exp(2\pi l) \mu$ ($l \in \Gamma(\mu)$); plus précisément on appelle transformée de LAPLACE¹ de μ la fonction continue L_μ définie dans $\hat{G} \times \Gamma(\mu)$ par

$$L_\mu(\hat{x}, l) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} \exp(2\pi l(x)) d\mu(x). \quad (1)$$

Par exemple, la transformée de LAPLACE² de la mesure $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbf{R}^n)$ est la fonction $L_\mu(\mathbf{z}) = \int \exp(-2i\pi\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$, holomorphe dans l'intérieur du cylindre $\mathbf{R}^n \times \Gamma(\mu)$ de \mathbf{C}^n ; si le support de μ est compact, L_μ est une fonction *entière de type exponentiel*, d'après le théorème de PALEY-WIENER. De même, la transformée de LAPLACE de $f \in L^1(\mathbf{Z})$ s'identifie à la fonction

$$L_f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \exp(2i\pi n z),$$

définie et de période 1 dans la bande $\mathbf{R} \times \Gamma(f)$ du plan complexe, et holomorphe à l'intérieur de cette bande, $\Gamma(f)$ étant l'intervalle formé des nombres réels l tels que la famille $(f(n) \exp(-2\pi n l))_{n \in \mathbf{N}}$ soit sommable.

On ne connaît que peu de propriétés de la transformation de LAPLACE dans le cas où G est distinct de \mathbf{R}^n et de \mathbf{Z}^n . Signalons seulement que, si Γ est un ensemble convexe de $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$, l'ensemble des mesures μ sur G telles que $\exp(2\pi l) \mu \in \mathcal{M}^1(G)$

¹ Les propriétés qu'on trouvera ici se rattachent essentiellement à celles de la transformation de LAPLACE dans \mathbf{R} , dite « bilatère ».

² On trouvera des généralisations et des propriétés de la transformation de LAPLACE dans \mathbf{R}^n , par exemple dans L. SCHWARTZ, *Meedlanden Lunds Univ. Met. Sem.*, fasc. dédié à M. RIESZ (1952), pp. 196-206, article où l'on trouvera, d'autre part, des indications bibliographiques.

pour tout $l \in \Gamma$, devient une algèbre lorsqu'on le munit des opérations usuelles et du produit de composition, et que la transformation de LAPLACE $\mu \rightarrow L_\mu$ est un isomorphisme de cette algèbre sur une algèbre de fonctions continues dans $\hat{G} \times \Gamma$.

Signalons encore ceci: le groupe $\text{Hom}(\hat{G}, \mathbf{R})$ est canoniquement isomorphe au groupe $\text{Hom}(\mathbf{R}, G)$ des représentations continues de \mathbf{R} dans G , c'est-à-dire des sous-groupes à un paramètre de G . Si r est un tel sous-groupe à un paramètre, on peut définir la dérivée au point $x \in G$ d'une fonction f définie au voisinage de x par $D_r f(x) = \left. \frac{df(xr(t))}{dt} \right|_{t=0}$. On peut à partir de là développer des éléments de calcul différentiel dans les groupes abéliens, susceptibles de s'appliquer en particulier à l'étude de la transformation de LAPLACE [20, 28]. J. RISS [28] a de plus édifié une théorie des distributions dans les groupes abéliens en utilisant les dérivées définies plus haut et étudié la transformation de FOURIER de ces distributions. Mais, à l'heure actuelle, le maniement de ces techniques est encore trop malaisé pour permettre une théorie intéressante de la transformation de LAPLACE.

2. On appelle *semi-norme* sur le groupe G une fonction > 0 , intégrable dans tout compact de G et telle que $\omega(xy) \leq \omega(x) \omega(y)$ quels que soient $x \in G$ et $y \in G$. Si ω est une semi-norme dans G , l'espace vectoriel $L^1(G, \omega)$ formé des fonctions intégrables dans G pour la mesure positive $\omega(x) dx$ est aussi formé des fonctions f telles que $f\omega \in L^1(G)$ (on identifie toujours des fonctions presque partout égales dans G). Normé par $N_1(f, \omega) = \int |f(x)| \omega(x) dx$ et muni du produit de composition usuel (formule (2) du § 2), $L^1(G, \omega)$ devient une algèbre normée. De plus, si $f \in L^1(G, \omega)$ et si $x \in G$, on a $U_x \cdot f \in L^1(G, \omega)$ et $N_1(U_x \cdot f, \omega) \leq \omega(x) N_1(f, \omega)$; on voit ainsi que U est une représentation de G dans le groupe des endomorphismes continus et inversibles de l'espace de BANACH $L^1(G, \omega)$ (cf. § 8, n° 1).

Tout caractère continu de l'algèbre $L^1(G, \omega)$ est de la forme $\chi(f) = \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$, où φ est une fonction telle que $\varphi/\omega \in L^\infty(G)$; on vérifie alors que φ est (presque partout) égale à un caractère généralisé $\hat{x} \exp(2\pi l)$ de G tel que $\exp(2\pi l) \leq \omega$.

Ainsi le *spectre* de l'algèbre $L^1(G, \omega)$ est en correspondance biunivoque, et même homéomorphe, avec l'espace $\hat{G} \times \Gamma$ où Γ est l'ensemble compact de convexe de $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ formé des $l \leq \frac{1}{2\pi} \log \omega$. On vient donc de voir que la valeur pour $f \in L^1(G, \omega)$ du caractère correspondant au point $(\hat{x}, l) \in \hat{G} \times \Gamma$ est $\int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} \exp(2\pi l(x)) f(x) dx$, c'est-à-dire égale à la valeur au point (\hat{x}, l) de la transformée de LAPLACE de f ; *la transformation de LAPLACE est ainsi une représentation biunivoque et continue de l'algèbre $L^1(G, \omega)$ sur une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues dans l'espace localement compact $\hat{G} \times \Gamma$, et nulles à l'infini.*

On peut alors déterminer les *idéaux réguliers maximaux* de $L^1(G, \omega)$: *chacun d'eux est formé des fonctions de $L^1(G, \omega)$ dont la transformée de LAPLACE s'annule en un point bien déterminé de $\hat{G} \times \Gamma$.* On peut de plus développer pour l'algèbre $L^1(G, \omega)$ des considérations analogues à celles du § 5, n° 1. Mais on ignore en général si le théorème taubérien subsiste pour cette algèbre; un résultat dans ce sens est le suivant: *si la semi-norme ω sur \mathbf{R} est telle que $\frac{\log \omega(x)}{1+x^2}$ soit intégrable dans \mathbf{R} , alors tout idéal fermé de $L^1(\mathbf{R}, \omega)$ distinct de $L^1(\mathbf{R}, \omega)$ est contenu dans un idéal régulier maximal* (c'est-à-dire que, pour qu'un idéal fermé I de $L^1(\mathbf{R}, \omega)$ soit égal à $L^1(\mathbf{R}, \omega)$, il faut et il suffit que pour tout point z de la bande $\mathbf{R} \times \Gamma$ de \mathbf{C} , il existe une fonction $f \in I$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi zx) f(x) dx \neq 0$). Ce résultat est dû à A. BEURLING¹.

3. La transformation de LAPLACE permet encore d'étudier, dans une certaine mesure, d'autres algèbres de groupe. On sait que l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_c(G)$ des mesures à support compact sur G est le dual de l'espace $\mathcal{C}(G)$ des fonctions continues dans G , muni de la topologie de convergence compacte (cf. §1, n° 1); dans tout ce qui suit, on supposera $\mathfrak{M}_c(G)$ muni de la topologie

¹ Cf. A. BEURLING, Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. *Congrès int. des Mathématiciens, Helsinki* (1938).

faible définie par $\mathcal{C}(G)$. Muni du produit de composition et de l'involution usuels (§ 2, n° 2), $\mathfrak{M}_c(G)$ est une *algèbre involutive*; les idéaux de $\mathfrak{M}_c(G)$ que l'on considérera seront toujours *faiblement fermés*: ce sont aussi les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_c(G)$, faiblement fermés et stables pour toutes les translations par les éléments de G .

Comme $x \rightarrow \varepsilon_x$ est un homéomorphisme de G dans $\mathfrak{M}_c(G)$, on vérifie facilement que les caractères (faiblement continus) de $\mathfrak{M}_c(G)$ sont de la forme $\chi_{\hat{x},l}(\mu) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} \exp(2\pi l(x)) d\mu(x)$ où (\hat{x}, l) est un point arbitraire de $\hat{G} \times \text{Hom}(\hat{G}, \mathbf{R})$; $\chi_{\hat{x},l}(\mu)$ est ainsi la valeur au point (\hat{x}, l) de la transformée de LAPLACE de la mesure μ ; on voit ainsi que la transformation de LAPLACE est une représentation biunivoque de l'algèbre involutive $\mathfrak{M}_c(G)$ sur une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues dans $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$.

Si H est une partie de $\mathcal{C}(G)$, l'ensemble des mesures μ orthogonales aux translatées par les éléments de G des fonctions de H (i.e. telles que $\int \overline{U_s \cdot f(x)} d\mu(x) = 0$ si $s \in G$ et $f \in H$) est un idéal H' de $\mathfrak{M}_c(G)$, formé des mesures μ telles que $\tilde{\mu} \star f = 0$ si $f \in H$. Si l'ensemble des fonctions $U_s \cdot f$ ($s \in G, f \in H$) n'est pas total, on dit que H est *moyenne périodique*: pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une mesure $\mu \neq 0$ à support compact et telle que $\tilde{\mu} \star f = 0$ pour toute $f \in H$. On appelle *ensemble spectral* de $H \subset \mathcal{C}(G)$ l'ensemble fermé de $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ formé des points (\hat{x}, l) tels que l'on puisse approcher uniformément sur tout compact de G la fonction $\hat{x} \exp(2\pi l)$ par des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de H .

De même, si I est un idéal de $\mathfrak{M}_c(G)$, on appelle *ensemble cospectral* de I l'ensemble fermé de $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ constitué par les points où s'annulent les transformées de LAPLACE de toutes les mesures appartenant à I . *L'ensemble spectral de $H \subset \mathcal{C}(G)$ est l'ensemble cospectral de l'idéal H'* . Dans le cas où G est quelconque, on voit facilement qu'on ne peut pas, en général, approcher les fonctions de $H \subset \mathcal{C}(G)$ par des combinaisons linéaires de caractères généralisés correspondant aux éléments de l'ensemble spectral de H ou, ce qui revient au même, qu'un

idéal de $\mathcal{M}_c(G)$ n'est pas complètement déterminé par son ensemble cospectral.

Mais, dans le cas de $G = \mathbf{R}$, L. SCHWARTZ [29] a pu élaborer une théorie complète, dont nous allons indiquer les résultats essentiels. Rappelons d'abord que la transformée de LAPLACE $L_\mu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi zx) d\mu(x)$ d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{R})$ est une fonction entière (de type exponentiel). Soit alors H une partie de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$; on appelle *spectre* de H l'ensemble des fonctions exponentielles monômes $x \rightarrow x^n \exp(2i\pi zx)$ ($n \in \mathbf{N}$, $z \in \mathbf{C}$) que l'on peut approcher uniformément dans tout compact de \mathbf{R} par des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de H ; si la fonction $x^n \exp(2i\pi zx)$ appartient au spectre de H , il en est de même de la fonction $x^m \exp(2i\pi zx)$ où $0 \leq m \leq n$: l'ensemble spectral de H est alors l'ensemble des nombres complexes z tels que $\exp(2i\pi zx)$ appartienne au spectre de H (d'où une distinction entre spectre et ensemble spectral, le second n'étant en quelque sorte qu'une partie du premier). Si H est moyenne périodique, l'ensemble spectral de H est fermé et discret; en fait, il est beaucoup plus « raréfié », comme on le verra plus loin. Le résultat fondamental peut alors s'exprimer de la façon suivante: *si H est moyenne périodique, le spectre de H est une partie topologiquement libre de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ et toute fonction de H peut être approchée uniformément sur tout compact de \mathbf{R} par des combinaisons linéaires de fonctions de son spectre. On a même beaucoup plus: toute fonction $f \in H$ possède un développement formel canonique suivant le spectre de H ; ce développement détermine la fonction f et permet de la reconstituer par le procédé de sommation d'ABEL; il converge même vers f si f est suffisamment dérivable.*

Soit maintenant I un idéal de $\mathcal{M}_c(\mathbf{R})$. Si $I \neq \{0\}$, l'ensemble cospectral de I est un ensemble fermé et *discret*; posons $\nu_I(z) = 0$ si le nombre complexe z n'appartient pas à l'ensemble spectral de I et, dans le cas contraire, désignons par $\nu_I(z)$ le minimum de l'ordre du zéro qu'ont au point z les transformées de LAPLACE des mesures appartenant à I ; on appelle *cospectre* de I l'ensemble des fonctions $x \rightarrow x^n \exp(2i\pi zx)$ telles que $0 \leq n < \nu_I(z)$. On complète cette définition en appelant cospectre de l'idéal $\{0\}$

l'ensemble de toutes les exponentielles monômes. Le cospectre d'un idéal I est ainsi formé des fonctions $x^n \exp(2i\pi zx)$ telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-2i\pi zx) d\mu(x) = 0$$

pour toute $\mu \in I$. Réciproquement, si $H \subset \mathcal{C}(\mathbf{R})$, le spectre de H est le cospectre de l'idéal H' défini ci-dessus. Si H est moyenne périodique, l'ensemble spectral de H est de *densité finie*, en ce sens que

$$\sum_{|z| \leq r} \nu_{H'}(z) = O(r)$$

quand r tend vers l'infini.

Le théorème indiqué ci-dessus permet alors de faire la théorie des idéaux de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$. Si $z \in \mathbf{C}$ et si n est un entier > 0 , désignons par $Z(z, n)$ l'idéal de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ formé des mesures dont la transformée de LAPLACE a au point z un zéro d'ordre $\geq n$; $Z(z, n)$ est de codimension finie n . *Les idéaux maximaux de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ sont les idéaux $Z(z, 1)$; les idéaux primaires (i.e. qui sont contenus dans un idéal maximal unique) sont les $Z(z, n)$; enfin tout idéal de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ est l'intersection des idéaux primaires qui le contiennent.* Autrement dit, tout idéal $I \neq \{0\}$ de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ est formé des mesures μ dont les transformées de LAPLACE ont, en chaque point $z \in \mathbf{C}$, un zéro d'ordre $\geq \nu_I(z)$, ou ce qui revient au même, telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-2i\pi zx) d\mu(x) = 0$$

si $0 \leq n < \nu_I(z)$.

On possède une théorie tout à fait analogue pour l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans \mathbf{R} dont le support est compact et pour l'espace des distributions dans \mathbf{R} (au lieu de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$)¹.

Par contre, on ignore à peu près complètement ce qui subsiste de ces résultats pour $G = \mathbf{R}^n$ ($n > 1$) et, à fortiori, pour G

¹ En dehors de [29], on trouvera d'importants compléments dans J. P. KAHANE, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles. *Ann. Inst. Fourier*, t. V, pp. 39-130 (1953-1954).

quelconque. On a toutefois des résultats analogues aux précédents, dans le cas de $G = \mathbf{R}^2$, lorsqu'on substitue à l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$ l'espace des fonctions entières, le plan complexe étant identifié à \mathbf{R}^2 [29].

Il est naturellement entendu que ce qu'on vient de lire ne saurait passer pour un exposé de la théorie de la transformation de LAPLACE et que le lecteur *devra* se reporter aux travaux la concernant pour avoir d'autres renseignements.

§ 8. Représentations des groupes et de leurs algèbres

On sait l'intérêt considérable que l'on trouve à faire opérer les groupes finis et les groupes compacts dans les espaces vectoriels de dimensions finies, et les rapports étroits qui lient les algèbres de ces groupes et les représentations ainsi obtenues. De telles représentations s'avèrent insuffisantes dans le cas des groupes localement compacts quelconques et il est nécessaire de représenter ceux-ci comme groupes d'opérateurs dans des espaces tels que les espaces de BANACH ou de HILBERT. Bien que l'on puisse pratiquement, dans le cas des groupes abéliens, se borner à l'étude de leurs caractères, ces représentations sont si étroitement liées à l'analyse harmonique qu'il a semblé utile de résumer ici quelques-unes de leurs propriétés. L'exposé qu'on lira ici est très succinct et on n'y trouvera pas trace des travaux importants dont a été l'objet, en ces dernières années, la théorie de la représentation des groupes ¹.

1. Dans ce paragraphe, on désigne par G un groupe localement compact, non nécessairement abélien. Soit E un espace de BANACH complexe et $\mathcal{L}^2(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes continus de E . Soit T une représentation de G dans le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}^2(E)$ telle que, si on désigne par T_x l'endomorphisme de E correspondant à $x \in G$ et par $T_x \cdot \mathbf{a}$

¹ On ne peut que citer ici, sans autres précisions, les travaux de F. BRUHAT, I. GELFAND, R. GODEMENT, HARISH-CHANDRA, G. W. MACKEY, E. MAUTNER, M. NEUMARK, I. SEGAL, etc.

l'image de $\mathbf{a} \in E$ par cet endomorphisme, l'application $x \rightarrow T_x \cdot \mathbf{a}$ de G dans E soit continue pour tout $\mathbf{a} \in E$; on dit brièvement que l'objet (E, T) est une *représentation* de G dans E ; si la dimension de E est finie, cette dimension s'appelle encore la dimension de la représentation (E, T) . Ainsi une représentation de dimension 1 (c'est-à-dire dans le groupe multiplicatif des nombres complexes $\neq 0$) d'un groupe abélien G est ce qu'on a appelé un caractère généralisé de G dans le § 7, n° 1. Toute représentation de dimension n du groupe additif \mathbf{R} est de la forme $x \rightarrow \exp(Ax)$ où $A \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Remarquons que toute représentation du groupe additif \mathbf{Z} dans E est de la forme $n \rightarrow A^n$ où A est un endomorphisme inversible de E .

Soit (E, T) une représentation du groupe G ; la fonction $x \rightarrow \|T_x\| = \omega(x)$ est une semi-norme sur G , semi-continue inférieurement et bornée sur tout compact de G (cf. § 7, n° 2). On désignera encore par $L^1(G, \omega)$ l'algèbre normée obtenue en munissant l'espace des fonctions intégrables dans G pour la mesure de densité ω de la norme $N_1(f, \omega) = \int |f(x)| \cdot \|T_x\| dx$ et du produit de composition. Si $f \in L^1(G, \omega)$ on pose

$$T_f \cdot \mathbf{a} = \int T_x \cdot \mathbf{a} f(x) dx \quad (\mathbf{a} \in E). \quad (1)$$

On a alors $T_f \in \mathcal{L}(E)$ et $\|T_f\| \leq N_1(f, \omega)$ et $f \rightarrow T_f$ est une représentation continue de l'algèbre normée $L^1(G, \omega)$ dans l'algèbre normée $\mathcal{L}(E)$, représentation qu'on désigne encore par T . On a $\lim_{\Phi(G)} T_u \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ pour tout vecteur $\mathbf{a} \in E$, ce qui montre que l'ensemble des vecteurs $T_f \cdot \mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \in E, f \in L^1(G, \omega)$) où $f \in \mathcal{K}(G)$ est *total*; on résume cette propriété en disant que T n'est pas *dégénérée*. Il revient au même d'étudier les représentations dans E du groupe G ou les représentations non dégénérées des algèbres $L^1(G, \omega)$ dans $\mathcal{L}(E)$. En effet, soit ω une *semi-norme* sur G , vérifiant les conditions indiquées ci-dessus et soit T une représentation (continue) et non dégénérée de $L^1(G, \omega)$ dans $\mathcal{L}(E)$, telle que l'on ait $\|T_f\| \leq N_1(f, \omega)$ pour toute $f \in L^1(G, \omega)$; alors T se déduit d'une représentation de G dans E au moyen de la formule (1).

Car, pour tout vecteur $\mathbf{b} = \sum_j T_{f_j} \cdot \mathbf{a}_j$ ($\mathbf{a}_j \in E, f_j \in L^1(G, \omega)$) et tout $x \in G$, $\lim_{\Phi(G)} T_{U_x \cdot u} \cdot \mathbf{b} = T_x \cdot \mathbf{b}$ existe et, comme T n'est

pas dégénérée, T_x se prolonge (par continuité) en un endomorphisme continu de E que l'on note encore T_x ; comme l'application $x \rightarrow U_x \cdot f$ est continue dans G pour toute $f \in L^1(G, \omega)$, on vérifie qu'il en est de même de l'application $x \rightarrow T_x \cdot \mathbf{b}$ et (E, T) est une représentation de G dans E ; enfin, comme $g \star f = \int (U_x \cdot f) g \, dx$ (la fonction intégrée prenant ses valeurs dans l'espace de BANACH $L^1(G, \omega)$), on voit que T se déduit de la représentation (E, T) au moyen de la formule (1)¹.

Par exemple, si I est un idéal à gauche fermé de $L^1(G, \omega)$, les translations U_s ($s \in G$) définissent par passage aux quotients des endomorphismes de l'espace de BANACH $L^1(G, \omega)/I$ et on obtient ainsi une représentation de G dans $L^1(G, \omega)/I$, représentation à laquelle correspond, à l'aide de la formule (1), la représentation canonique de $L^1(G, \omega)$ dans l'algèbre des endomorphismes de $L^1(G, \omega)/I$.

Soit (E, T) une représentation dans E du groupe G ; on dit qu'un sous-espace vectoriel fermé F de E est *invariant* par T s'il est stable pour tous les endomorphismes T_x ($x \in G$), ou, ce qui est équivalent, par tous les T_f ($f \in L^1(G, \omega)$). Il est clair que, si B est une partie de E , il existe un plus petit sous-espace vectoriel fermé de E , invariant par T et contenant B ; ce sous-espace est dit *engendré par* B . On dit que la représentation (E, T) est *monogène* s'il existe un vecteur $\mathbf{a} \in E$ engendrant E ; \mathbf{a} s'appelle alors un *générateur* de (E, T) .

On dit que la représentation (E, T) de G est *irréductible* si E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels fermés de E invariants par T ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que tout vecteur $\mathbf{a} \neq 0$ de E soit un générateur de (E, T) . Toute représentation de G , de dimension 1, est évidemment irréductible. On verra plus loin une réciproque de cette propriété lorsque G est abélien.

2. On dit que la représentation (E, T) du groupe G est *bornée* si $\omega(x) = \|T_x\| = 1$; on a alors $L^1(G, \omega) = L^1(G)$; de plus T se prolonge en une représentation continue de l'algèbre normée $\mathfrak{M}^1(G)$ dans $\mathcal{L}^{\infty}(E)$ en posant

¹ On trouvera des applications de ceci dans R. GODEMENT, A theory of spherical functions, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 73, pp. 496-556 (1952).

$$T_\mu \cdot \mathbf{a} = \int T_x \cdot \mathbf{a} d\mu(x) \quad (\mathbf{a} \in E), \quad (2)$$

formule qui généralise évidemment (1).

Par exemple, si $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p(G), U)$ est une représentation bornée de G , dite *régulière*; son prolongement à $\mathcal{M}^1(G)$ s'obtient naturellement en prenant pour U_μ l'endomorphisme $f \rightarrow \mu \star f$ de $L^p(G)$. Toute représentation bornée du groupe additif \mathbf{R} est de la forme $x \rightarrow \exp(Ax)$ où A est un endomorphisme convenable de E .

Supposons maintenant le groupe G *abélien*. On appelle *spectre* de la représentation bornée (E, T) de G le cospectre de l'idéal fermé de $L^1(G)$, noyau de T ; c'est aussi le spectre de la famille des fonctions $\langle T_x \cdot \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle$ où \mathbf{a} est un vecteur de E et \mathbf{a}' un élément du dual de E . Si le spectre de la représentation (E, T) est réduit à un point $\hat{x} \in \hat{G}$, le noyau de T est l'idéal $Z(\hat{x})$, d'après le théorème taubérien généralisé (§ 6, n° 3); il en résulte que $T_x = \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} I$, où I est l'endomorphisme identique de E , et que $T_f = \hat{f}(\hat{x}) I$ (pour le voir, il suffit de remarquer que chacune des fonctions $\langle T_x \cdot \mathbf{a}, \mathbf{a}' \rangle$ est orthogonale à $Z(\hat{x})$, donc proportionnelle à $\langle x, \hat{x} \rangle$, ce qui entraîne aussitôt le résultat [13]).

Pour qu'une représentation bornée (E, T) du groupe abélien G soit irréductible, il faut et il suffit qu'elle soit de dimension 1: pour voir que cette condition, trivialement suffisante, est nécessaire, on prouve d'abord que le spectre de (E, T) est réduit à un point $\hat{x} \in \hat{G}$, ce qui entraîne que (E, T) est le caractère $x \rightarrow \overline{\langle x, \hat{x} \rangle}$, d'après ce qui précède, puisque (E, T) est monogène.

On ignore ce qui subsiste de ce critère d'irréductibilité lorsque la représentation (E, T) n'est pas bornée. Toutefois, lorsque G est un groupe *élémentaire* (§ 5, n° 3, *b*), on peut montrer que si (E, T) est une représentation de G , irréductible et à croissance lente (i.e. telle que ω soit majorée par un polynôme), (E, T) est de dimension 1. Ce résultat est dû à L. SCHWARTZ et généralise un résultat un peu plus fin dû à J. WERMER¹ dans le cas où $G = \mathbf{Z}$.

¹ Cf. J. WERMER, The existence of invariant subspaces. *Duke Math. J.*, t. 19, pp. 615-622 (1952) et l'exposé de R. PALLU DE LA BARRIÈRE au Séminaire Bourbaki (Paris, déc. 1953).

On remarque que si (E, T) est une représentation à croissance lente de G , T définit une distribution à valeurs dans $\mathcal{L}^s(E)$, tempérée dans G ; la transformée de FOURIER de cette distribution a comme support le spectre de la représentation (E, T) ; cette propriété permet de construire des sous-espaces fermés de E , invariants par T , de telle sorte que si (E, T) est irréductible, son spectre se réduit à un point de \hat{G} et on conclut comme on l'a fait plus haut.

3. Soit maintenant E un espace *hilbertien*, dont la structure est définie par une forme hermitienne positive qu'on désignera par $(\mathbf{a} | \mathbf{b})$. On dit qu'une représentation (E, T) de G dans E est *unitaire* si tous les opérateurs T_x sont unitaires, ou ce qui revient au même, si l'adjoint T_x^* de T_x est $T_{x^{-1}}$ pour tout $x \in G$. Une représentation unitaire (E, T) de G est bornée et son prolongement à $\mathcal{M}^1(G)$, défini par (2), est alors une représentation de l'algèbre involutive $\mathcal{M}^1(G)$ dans l'algèbre involutive $\overline{\mathcal{L}^s(E)}$, c'est-à-dire que l'on a $T_\mu^* = T_{\tilde{\mu}}$. Inversement, si T est une représentation continue de l'algèbre involutive normée $L(G)$ dans l'algèbre involutive $\mathcal{L}^s(E)$, la représentation de G dans E qu'on en déduit, comme il a été dit au n° 1, est unitaire. La représentation régulière $(L^2(G), U)$ de G est évidemment unitaire.

Pour qu'une représentation unitaire (E, T) de G soit *irréductible*, il faut et il suffit que la sous-algèbre formée des opérateurs T_f ($f \in L^1(G)$, ou $f \in \mathcal{K}(G)$) soit partout dense dans $\mathcal{L}^s(E)$, muni de la topologie de convergence simple dans E (c'est la topologie dite forte).

Soit (E, T) une représentation unitaire du groupe G ; on vérifie facilement que, pour tout $\mathbf{a} \in E$, la fonction $x \rightarrow (\mathbf{a} | T_x \cdot \mathbf{a})$ est de type positif dans G ; plus généralement, si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs de E , la fonction $x \rightarrow (\mathbf{a} | T_x \cdot \mathbf{b})$ appartient à $\mathcal{P}(G)$.

Cela étant, on appellera encore *représentation monogène* de G dans E l'objet (E, T, \mathbf{a}) formé d'une représentation monogène (E, T) et d'un générateur \mathbf{a} de cette représentation; la fonction de type positif $x \rightarrow (\mathbf{a} | T_x \cdot \mathbf{a})$ est dite *caractéristique* de la représentation (E, T, \mathbf{a}) . Cette définition se justifie de la façon suivante: on dit que deux représentations monogènes (E, T, \mathbf{a}) et (E', T', \mathbf{a}') de G sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme A de l'espace hilbertien E sur l'espace hilbertien E' tel que l'on ait $A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}'$ et $A \cdot T_x = T'_x \cdot A$ pour tout $x \in G$: pour qu'il en

soit ainsi, il faut et il suffit que les fonctions caractéristiques de (E, T, \mathbf{a}) et (E', T', \mathbf{a}') soient égales.

En outre, à toute fonction $\varphi \in \mathfrak{R}(G)$ correspond une représentation monogène de G ayant φ comme fonction caractéristique (et dont, par suite, la classe d'équivalence est bien déterminée) [12, 14, 23].

Soit, en effet, $\varphi \in \mathfrak{R}(G)$; $(f|g) = \int \tilde{g} \star f(x) \overline{\varphi(x)} dx$ est une forme sesquilinéaire et positive dans $L^1(G)$; l'ensemble des $f \in L^1(G)$ telles que $(f|f) = 0$ est un idéal à gauche $N(\varphi)$ et en complétant l'espace préhilbertien quotient $L^1(G)/N(\varphi)$, on obtient un espace hilbertien $H(\varphi)$; si $x \in G$, l'application $f \rightarrow U_x \cdot f$ (resp $f \rightarrow \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$) se laisse prolonger par continuité, après passage aux quotients, en un endomorphisme unitaire $U(\varphi)_x$ de $H(\varphi)$ (resp. une forme linéaire continue dans $H(\varphi)$, qui s'identifie à un vecteur $\mathbf{a} \in H(\varphi)$); on obtient ainsi une représentation unitaire monogène $(H(\varphi), U(\varphi), \mathbf{a})$ de G dont la fonction φ est caractéristique. Remarquons encore que la représentation de $L^1(G)$ dans $L^2(H(\varphi))$, qui correspond à cette représentation de G , s'obtient en associant à $g \in L^1(G)$ l'endomorphisme $U(\varphi)_g$ de $H(\varphi)$ obtenu, après passage aux quotients, en prolongeant par continuité l'application $f \rightarrow g \star f$; $U(\varphi)_g \cdot \mathbf{a}$ est la classe de $g \in L^1(G)$ modulo l'idéal $N(\varphi)$.

Le procédé de construction qu'on vient de décrire s'étend facilement lorsqu'on substitue à la fonction $\varphi \in \mathfrak{R}(G)$ une mesure de type positif dans G , mais la représentation unitaire de G qu'on obtient ainsi n'est pas en général monogène. En appliquant ceci à la mesure définie par la masse 1 au point $e \in G$, on obtient naturellement la représentation régulière $(L^2(G), U)$. Tout ceci est susceptible de généralisations diverses, exposées en particulier dans les travaux de R. GODEMENT¹.

Soit (E, T, \mathbf{a}) une représentation unitaire monogène de G telle que $\|\mathbf{a}\| = 1$ et $\varphi \in \mathfrak{R}_0(G)$ sa fonction caractéristique; pour que cette représentation soit irréductible, il faut et il suffit que φ soit un point extrémal du sous-ensemble convexe $\mathfrak{R}_0(G)$ de $L^\infty(G)$ (cf. § 2, n° 3) (c'est-à-dire un caractère de G lorsque ce groupe est abélien).

On peut ainsi montrer que le groupe G , ainsi que son algèbre $L^1(G)$, est séparé par ses représentations unitaires irréductibles,

¹ En dehors de [14], on pourra consulter R. GODEMENT, Mémoire sur la théorie des caractères. *Journal Math. pures et appl.*, t. XXX, pp. 1-110 (1951).

résultat bien connu dans le cas des groupes compacts (et dans celui des groupes abéliens !).

Diverses généralisations du théorème de BOCHNER et de PLANCHEREL-WEIL permettent de réaliser la décomposition spectrale d'une représentation unitaire au moyen de représentations irréductibles ou de caractères. On se bornera ici à indiquer le résultat obtenu dans le cas, le plus simple, où le groupe G est *abélien*. Soit (E, T) une représentation unitaire de G ; pour tout couple (\mathbf{a}, \mathbf{b}) de vecteurs de E , la fonction $x \rightarrow (\mathbf{a}, T_x \mathbf{b})$ de $\mathfrak{C}(G)$ est, d'après le théorème de BOCHNER, transformée de FOURIER d'une mesure $\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$: les mesures $\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ ont leurs supports contenus dans le spectre de (E, T) ; on les appelle les *mesures spectrales* relatives à la représentation (E, T) . On a ainsi $(T_f \mathbf{a} | \mathbf{b}) = \int \hat{f}(\hat{x}) d\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\hat{x})$ pour toute $f \in L^1(G)$. Les mesures spectrales permettent la décomposition de la représentation (E, T) suivant les caractères appartenant à son spectre (théorème de STONE) [14, 32].

Soit $\mathfrak{J}(\hat{G})$ l'espace vectoriel formé par les fonctions définies dans G et intégrables pour toutes les mesures spectrales $\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$; à toute fonction $f' \in \mathfrak{J}(\hat{G})$ correspond un opérateur $T_{f'} \in \mathcal{L}^2(E)$, au moyen de la formule $(T_{f'} \mathbf{a} | \mathbf{b}) = \int f'(\hat{x}) d\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\hat{x})$; $f' \rightarrow T_{f'}$, est une représentation de l'algèbre involutive $\mathfrak{J}(\hat{G})$ dans $\mathcal{L}^2(E)$, telle que $\|T_{f'}\| \leq \|f'\|$. En particulier, si A' est un ensemble borélien de \hat{G} (que l'on peut supposer contenu dans le spectre de (E, T)), la formule $(E(A') \mathbf{a} | \mathbf{b}) = \mu_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(A')$ définit un *projecteur* $E(A')$ de E (sur le « sous-espace spectral » de E , relatif à A'); si $x \in G$, on voit facilement que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition finie (A'_j) de G en ensembles boréliens, telle que l'on ait $|(\mathbf{a} | T_x \mathbf{b}) - \sum_j \langle x, x_j \rangle (E(A'_j) \mathbf{a} | \mathbf{b})| \leq \varepsilon$ si $\hat{x}_j \in A'_j$, d'où $\|T_x - \sum_j \overline{\langle x, \hat{x}_j \rangle} E(A'_j)\| \leq \varepsilon$, formule qu'on écrit encore en vertu des propriétés des intégrales, sous la forme $T_x = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} dE(\hat{x})$; on a de même $T_f = \int \hat{f}(\hat{x}) dE(\hat{x})$ si $f \in L^1(G)$.

Remarquons enfin que d'après le théorème de PLANCHEREL-WEIL, $f \rightarrow \hat{f}$ est un isomorphisme de l'espace hilbertien $L^2(G)$ sur l'espace hilbertien $L^2(\hat{G})$, isomorphisme qui à U_x (resp. U_f) fait correspondre l'opérateur de multiplication par le caractère x' de \hat{G} (resp. \hat{f}); il est alors clair que la mesure spectrale relative à la représentation régulière de G , correspondant au couple (f, g) de fonctions de $L^2(G)$, est définie par $d\mu_{f, g}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x}) \overline{\hat{g}(\hat{x})} d\hat{x}$.

INDEX DES NOTATIONS

- G désigne un *groupe localement compact* (éventuellement abélien); toutes les fonctions et mesures considérées sont définies dans G et à valeurs complexes.
- $\|f\|$ ($\sup_x |f(x)|$, f fonction bornée).
- $\mathcal{C}(G)$ (espace vectoriel des fonctions continues).
- $\mathcal{K}(G)$ (espace vectoriel des fonctions continues, à support compact).
- $\overline{\mathcal{K}}(G)$ (espace de BANACH des fonctions continues, nulles à l'infini): § 1, n° 1.
- $\mathfrak{M}(G)$ (espace vectoriel des mesures de Radon): § 1, n° 1.
- $\mathfrak{M}^1(G)$ (espace de BANACH des mesures bornées): § 1, n° 1.
- $\|\mu\|$ (norme de la mesure bornée μ): § 1, n° 1.
- $\mathfrak{M}_c(G)$ (espace vectoriel des mesures à support compact).
- $U_s \cdot f$ (translatée $x \rightarrow f(s^{-1}x)$ de la fonction f par $s \in G$): § 2, n° 1.
- $\int f(x) dx$ (intégrale de HAAR de la fonction f): § 2, n° 1.
- $L^p(G)$ (espace de BANACH des fonctions de p -ième puissance intégrable pour la mesure de HAAR, $1 \leq p < +\infty$): § 2, n° 1.
- $L^\infty(G)$ (espace de BANACH des fonctions mesurables et bornées en mesure de HAAR): § 2, n° 1.
- $N_p(f)$ ($(\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$, f fonction de $L^p(G)$): § 2, n° 1.
- $N_\infty(f)$ (borne supérieure en mesure de HAAR de la fonction f): § 2, n° 1.
- $\mu \star \nu, f \star g$ (produit de composition des mesures μ et ν , des fonctions f et g): § 2, n° 2.
- $\tilde{\mu}, \tilde{f}$ (mesure définie par $d\tilde{\mu}(x^{-1})$ (f mesure), $\overline{f(x^{-1})}$ (f fonction)): § 2, n° 1.
- $\Phi(G)$ (approximation de l'unité): § 2, n° 1.
- $\mathcal{P}(G)$ (ensemble des fonctions de type positif): § 2, n° 3.
- $\mathcal{P}_0(G)$ (ensemble des fonctions de type positif bornées par 1): § 2, n° 3.
- $\mathfrak{V}(G)$ (espace vectoriel des combinaisons linéaires de fonctions de type positif): § 2, n° 3.
- $\mathfrak{V}^n(G)$ (intersection de $\mathfrak{V}(G)$ avec $L^n(G)$).
- \hat{G} (groupe dual de G): § 2, n° 1.
- $\langle x, \hat{x} \rangle$ (valeur de $\hat{x} \in \hat{G}$ pour $x \in G$): § 3, n° 1.
- \hat{f} (transformée de FOURIER de la fonction f): § 4, n° 1.
- F_μ (transformée de FOURIER de la mesure μ): § 4, n° 1.
- $\mathfrak{A}(\hat{G})$ (algèbre de transformées de FOURIER des fonctions de $L^1(G)$): § 4, n° 1.
- Cosp (I) (cospectre de l'idéal I de $L^1(G)$): § 6, n° 1.
- Z (A') (idéal des fonctions de $L^1(G)$ dont les transformées de FOURIER s'annulent dans $A' \subset \hat{G}$): § 6, n° 1.
- Sp (H) (spectre de la partie H de $L^\infty(G)$): § 6, n° 4.
- J (H) (sous-espace invariant par translations engendré par $H \subset L^\infty(G)$): § 6, n° 4.
- H^\perp (sous-groupe de \hat{G} (resp. G) orthogonal à $H \subset G$ (resp. \hat{G}): § 5, n° 1.

- L_μ (transformée de LAPLACE de la mesure μ): § 7, n° 1.
 ω (semi-norme): § 7, n° 2.
 $L^1(G, \omega)$ (algèbre des fonctions intégrables pour la semi-norme ω): § 7, n° 2.
 $\mathcal{L}(E)$ (algèbre des endomorphismes continus de l'espace de BANACH E): § 8, n° 1.
 (E, T) (représentation de G dans E): § 8, n° 1.

On a les injections naturelles (inclusions) suivantes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathfrak{V}(G) & \longrightarrow & \mathfrak{A}(G) & \longleftarrow & \mathfrak{V}^2(G) & \longleftarrow & \mathfrak{V}^1(G) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & L^2(G) & \longrightarrow & L^1(G) \cap L^2(G) \longrightarrow L^1(G) \longrightarrow \mathfrak{M}^1(G)
 \end{array}$$

La transformation de FOURIER applique biunivoquement ce diagramme sur le diagramme symétrique dans lequel G est remplacé par \hat{G} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEURLING, A., Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel. *Acta Mathematica*, t. LXXVII (1945), pp. 127-136.
- [2] BOCHNER, S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig Akad. Verlagsgesellschaft (1932).
- [3] BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique*, Livre III, Topologie générale (fasc. de résultats). *Actual. Scient. et Ind.*, n° 1196, Paris (1953).
- [4] ——— Ibid., Livre V, Espaces vectoriels topologiques. *Actual. Scient. et Ind.*, nos 1189 et 1229, Paris (1953-1955).
- [5] ——— Ibid., Livre VI, Intégration. *Actual. Scient. et Ind.*, n° 1175, Paris (1952).
- [6] CARLEMAN, T., *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*. Uppsala (1944).
- [7] CARTAN, H. et R. GODEMENT, Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens. *Ann. Scient. E.N.S.*, t. LXIV (1947), pp. 77-99.
- [8] GELFAND, I., Normierte Ringe. *Rec. Math. Moscou*, N.S. t. IX (1941), pp. 3-24.
- [9] ——— et M. NEUMARK, On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Rec. Math. Moscou*, N. S. t. XII (1943), pp. 197-212.
- [10] ——— et D. A. RAÏKOV, Sur la théorie des caractères des groupes topologiques commutatifs. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, t. XXV (1939), pp. 570-572.
- [11] ———, D. A. RAÏKOV et G. J. ŠILOV, Anneaux normés commutatifs. *Uspekhi Mat. Nauk.*, N.S., t. II (1946), pp. 48-146.
- [12] GODEMENT, R., Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXIII (1948), pp. 1-84.
- [13] ——— Théorèmes taubériens et théorie spectrale. *Ann. Scient. E.N.S.*, t. LXIV (1947), pp. 119-138.

- [14] GODEMENT, R., Sur la théorie des représentations unitaires. *Ann. of Math.*, t. LIII (1951), pp. 68-124.
- [15] HELSON, H., Spectral synthesis of bounded functions. *Ark. Mat.*, t. I (1951), pp. 497-502.
- [16] VAN KAMPEN, E. R., Locally bi-compact groups and their character groups. *Ann. of Math.*, t. XXXVII (1936), pp. 78-91.
- [17] KAPLANSKY, I., Primary ideals in group algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXXV (1949), pp. 133-136.
- [18] KREIN, M., Sur une généralisation du théorème de Plancherel au cas des intégrales de Fourier sur les groupes topologiques commutatifs. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, t. XXX (1941), pp. 484-488.
- [19] LOOMIS, L. H., *An introduction to abstract harmonic analysis*. New York (1953).
- [20] MACKEY, G. W., The Laplace transform for locally compact groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXXIV (1948), pp. 156-162.
- [21] ——— Functions on locally compact groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LVI (1950), pp. 385-412.
- [22] MANDELBOJT, S. et AGMON, S. Une généralisation du théorème taubérien de Wiener. *Acta Szeged*, t. XII (1950), pp. 167-176.
- [23] NEUMARK, M., Involutive Algebren. *Uspekhi Mat. Nauk.*, t. III (1948), pp. 52-145 (= *Sowjetische Arbeiten zur Funktional-Analysis*, Berlin (1954), pp. 89-196).
- [24] PONTRJAGIN, L., *Topological groups*. Princeton (1939).
- [25] RAÏKOV, D. A., Fonctions de type positif sur les groupes commutatifs avec une mesure invariante. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, t. XXVIII (1947), pp. 296-300.
- [26] ——— Analyse harmonique dans les groupes commutatifs avec la mesure de Haar et la théorie des caractères. *Publ. Inst. Math. Steklov*, t. XIV (1945), pp. 5-86 (= *Sowjetische Arbeiten zur Funktional-Analysis*, Berlin (1954), pp. 11-87).
- [27] REITER, H., Investigations in harmonic analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXXIII (1952), pp. 401-427.
- [28] RISS, J., Éléments de calcul différentiel et théorie des distributions dans les groupes abéliens localement compacts. *Acta Mathematica*, t. LXXXIX (1953), pp. 45-105.
- [29] SCHWARTZ, L., Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. *Ann. of Math.*, t. ILVIII (1947), pp. 857-929.
- [30] SEGAL, I., The group algebra of a locally compact group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXI (1947), pp. 69-105.
- [31] STONE, H., A general theory of spectra. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, t. XXVI (1940), pp. 280-283.
- [32] ——— On the foundations of harmonic analysis. *Meddlanden Lunds Univ. Mat. Sem.*, fasc. dédié à M. Riesz (1952), pp. 207-227.
- [33] WEIL, A., *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. *Actual. Scient. et Ind.*, n° 869, Paris (1940).
- [34] WIENER, N., *The Fourier integral and certain of its applications*. Cambridge Univ. Press (1933).
- [35] ZYGMUND, A., *Trigonometrical series*. *Monografje Mat.*, t. V, Varsovie (1935).