§ 8. Représentations des groupes et de leurs algèbres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

quelconque. On a toutefois des résultats analogues aux précédents, dans le cas de $G = \mathbf{R}^2$, lorsqu'on substitue à l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$ l'espace des fonctions entières, le plan complexe étant identifié à $\mathbf{R}^2$ [29].

Il est naturellement entendu que ce qu'on vient de lire ne saurait passer pour un exposé de la théorie de la transformation de LAPLACE et que le lecteur *devra* se reporter aux travaux la concernant pour avoir d'autres renseignements.

§ 8. Représentations des groupes et de leurs algèbres

On sait l'intérêt considérable que l'on trouve à faire opérer les groupes finis et les groupes compacts dans les espaces vectoriels de dimensions finies, et les rapports étroits qui lient les algèbres de ces groupes et les représentations ainsi obtenues. De telles représentations s'avèrent insuffisantes dans le cas des groupes localement compacts quelconques et il est nécessaire de représenter ceux-ci comme groupes d'opérateurs dans des espaces tels que les espaces de BANACH ou de HILBERT. Bien que l'on puisse pratiquement, dans le cas des groupes abéliens, se borner à l'étude de leurs caractères, ces représentations sont si étroitement liées à l'analyse harmonique qu'il a semblé utile de résumer ici quelques-unes de leurs propriétés. L'exposé qu'on lira ici est très succinct et on n'y trouvera pas trace des travaux importants dont a été l'objet, en ces dernières années, la théorie de la représentation des groupes [1].

1. Dans ce paragraphe, on désigne par G un groupe localement compact, non nécessairement abélien. Soit E un espace de BANACH complexe et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes continus de E. Soit T une représentation de G dans le groupe des éléments invêrsibles de $\mathcal{L}(E)$ telle que, si on désigne par T_x l'endomorphisme de E correspondant à $x \in G$ et par $T_x . \mathbf{a}$

[1] On ne peut que citer ici, sans autres précisions, les travaux de F. BRUHAT, I. GELFAND, R. GODEMENT, HARISH-CHANDRA, G. W. MACKEY, E. MAUTNER, M. NEUMARK, I. SEGAL, etc.

l'image de $\mathbf{a} \in \mathrm{E}$ par cet endomorphisme, l'application $x \to T_x . \mathbf{a}$ de G dans E soit continue pour tout $\mathbf{a} \in \mathrm{E}$; on dit brièvement que l'objet (E, T) est une *représentation* de G dans E; si la dimension de E est finie, cette dimension s'appelle encore la dimension de la représentation (E, T). Ainsi une représentation de dimension 1 (c'est-à-dire dans le groupe multiplicatif des nombres complexes $\neq 0$) d'un groupe abélien G est ce qu'on a appelé un caractère généralisé de G dans le § 7, n° 1. Toute représentation de dimension n du groupe additif $\mathbf{R}$ est de la forme $x \to \exp(Ax)$ où $A \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Remarquons que toute représentation du groupe additif $\mathbf{Z}$ dans E est de la forme $n \to A^n$ où A est un endomorphisme inversible de E.

Soit (E, T) une représentation du groupe G; la fonction $x \to \| T_x \| = \omega(x)$ est une semi-norme sur G, semi-continue inférieurement et bornée sur tout compact de G (cf. § 7, n° 2). On désignera encore par $\mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$ l'algèbre normée obtenue en munissant l'espace des fonctions intégrables dans G pour la mesure de densité ω de la norme $\mathrm{N}_1(f, \omega) = \int |f(x)| . \| T_x \| \, dx$ et du produit de composition. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$ on pose

$$T_f \cdot \mathbf{a} = \int T_x \cdot \mathbf{a} f(x) \, dx \qquad (\mathbf{a} \in \mathrm{E}) \,. \tag{1}$$

On a alors $T_f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\| T_f \| \leqslant \mathrm{N}_1(f, \omega)$ et *$f \to T_f$ est une représentation continue de l'algèbre normée* $\mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$ *dans l'algèbre normée* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, représentation qu'on désigne encore par T. On a $\lim_{\Phi(\mathrm{G})} T_u . \mathbf{a} = \mathbf{a}$ pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathrm{E}$, ce qui montre que l'ensemble des vecteurs $T_f . \mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \in \mathrm{E}$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$) où $f \in \mathcal{K}(\mathrm{G})$ est *total*; on résume cette propriété en disant que T n'est pas *dégénérée.* Il revient au même d'étudier les représentations dans E du groupe G ou les représentations non dégénérées des algèbres $\mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. En effet, soit ω une *semi-norme* sur G, vérifiant les conditions indiquées ci-dessus et soit T une représentation (continue) et non dégénérée de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, telle que l'on ait $\| T_f \| \leqslant \mathrm{N}_1(f, \omega)$ pour toute $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$; alors T se déduit d'une représentation de G dans E au moyen de la formule (1).

Car, pour tout vecteur $\mathbf{b} = \sum_j T_{f_j} . \mathbf{a}_j$ ($\mathbf{a}_j \in \mathrm{E}$, $f_j \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \omega)$) et tout $x \in \mathrm{G}$, $\lim_{\Phi(\mathrm{G})} T_{U_x . u} . \mathbf{b} = T_x . \mathbf{b}$ existe et, comme T n'est pas dégénérée, T_x se prolonge (par continuité) en un endomorphisme continu de E que l'on note encore T_x; comme l'application $x \to U_x \cdot f$ est continue dans G pour toute $f \in L^1(G, \omega)$, on vérifie qu'il en est de même de l'application $x \to T_x \cdot \mathbf{b}$ et (E, T) est une représentation de G dans E; enfin, comme $g \star f = \int (U_x \cdot f)\, g\, dx$ (la fonction intégrée prenant ses valeurs dans l'espace de Banach $L^1(G, \omega)$), on voit que T se déduit de la représentation (E, T) au moyen de la formule (1) [1].

Par exemple, si I est un idéal à gauche fermé de $L^1(G, \omega)$, les translations U_s ($s \in G$) définissent par passage aux quotients des endomorphismes de l'espace de Banach $L^1(G, \omega)/I$ et on obtient ainsi une représentation de G dans $L^1(G, \omega)/I$, représentation à laquelle correspond, à l'aide de la formule (1), la représentation canonique de $L^1(G, \omega)$ dans l'algèbre des endomorphismes de $L^1(G, \omega)/I$.

Soit (E, T) une représentation dans E du groupe G; on dit qu'un sous-espace vectoriel fermé F de E est *invariant* par T s'il est stable pour tous les endomorphismes T_x ($x \in G$), ou, ce qui est équivalent, par tous les T_f ($f \in L^1(G, \omega)$). Il est clair que, si B est une partie de E, il existe un plus petit sous-espace vectoriel fermé de E, invariant par T et contenant B; ce sous-espace est dit *engendré par* B. On dit que la représentation (E, T) est *monogène* s'il existe un vecteur $\mathbf{a} \in E$ engendrant E; $\mathbf{a}$ s'appelle alors un *générateur* de (E, T).

On dit que la représentation (E, T) de G est *irréductible* si E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels fermés de E invariants par T; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que tout vecteur $\mathbf{a} \neq 0$ de E soit un générateur de (E, T). Toute représentation de G, de dimension 1, est évidemment irréductible. On verra plus loin une réciproque de cette propriété lorsque G est abélien.

2. On dit que la représentation (E, T) du groupe G est *bornée* si $\omega(x) = \| T_x \| = 1$; on a alors $L^1(G, \omega) = L^1(G)$; de plus T se prolonge en une représentation continue de l'algèbre normée $\mathcal{M}^1(G)$ dans $\mathcal{L}(E)$ en posant

[1] On trouvera des applications de ceci dans R. Godement, A theory of spherical functions, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 73, pp. 496-556 (1952).

$$T_\mu \cdot \mathbf{a} = \int T_x \cdot \mathbf{a}\, d\mu(x) \qquad (\mathbf{a} \in \mathrm{E})\,, \qquad (2)$$

formule qui généralise évidemment (1).

Par exemple, si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $(\mathrm{L}^p(\mathrm{G}), U)$ est une représentation bornée de G, dite *régulière*; son prolongement à $\mathcal{M}^1(\mathrm{G})$ s'obtient naturellement en prenant pour U_μ l'endomorphisme $f \to \mu \star f$ de $\mathrm{L}^p(\mathrm{G})$. Toute représentation bornée du groupe additif **R** est de la forme $x \to \exp(Ax)$ où A est un endomorphisme convenable de E.

Supposons maintenant le groupe G *abélien.* On appelle *spectre* de la représentation *bornée* (E, T) de G le cospectre de l'idéal fermé de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$, noyau de T; c'est aussi le spectre de la famille des fonctions $\langle T_x \,.\, \mathbf{a}, \mathbf{a}'\rangle$ où $\mathbf{a}$ est un vecteur de E et $\mathbf{a}'$ un élément du dual de E. *Si le spectre de la représentation* (E, T) *est réduit à un point* $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$, *le noyau de T est l'idéal* $\mathrm{Z}(\hat{x})$, d'après le théorème taubérien généralisé (§ 6, nº 3); il en résulte que $T_x = \overline{\langle x, \hat{x}\rangle}\, I$, où I est l'endomorphisme identique de E, et que $T_f = \hat{f}(\hat{x})\, I$ (pour le voir, il suffit de remarquer que chacune des fonctions $\langle \mathrm{T}_x \,.\, \mathbf{a}, \mathbf{a}'\rangle$ est orthogonale à $\mathrm{Z}(\hat{x})$, donc proportionnelle à $\overline{\langle x, \hat{x}\rangle}$, ce qui entraîne aussitôt le résultat [13]).

Pour qu'une représentation bornée (E, T) *du groupe abélien* G *soit irréductible, il faut et il suffit qu'elle soit de dimension* 1: pour voir que cette condition, trivialement suffisante, est nécessaire, on prouve d'abord que le spectre de (E, T) est réduit à un point $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$, ce qui entraîne que (E, T) est le caractère $x \to \overline{\langle x, \hat{x}\rangle}$, d'après ce qui précède, puisque (E, T) est monogène.

On ignore ce qui subsiste de ce critère d'irréductibilité lorsque la représentation (E, T) n'est pas bornée. Toutefois, lorsque G est un groupe *élémentaire* (§ 5, nº 3, *b)*), on peut montrer que si (E, T) est une représentation de G, irréductible et à croissance lente (i.e. telle que ω soit majorée par un polynôme), (E, T) est de dimension 1. Ce résultat est dû à L. Schwartz et généralise un résultat un peu plus fin dû à J. Wermer [1] dans le cas où $\mathrm{G} = \mathbf{Z}$.

---

[1] Cf. J. Wermer, The existence of invariant subspaces. *Duke Math. J.*, t. 19, pp. 615-622 (1952) et l'exposé de R. Pallu de la Barrière au *Séminaire Bourbaki* (Paris, déc. 1953).

On remarque que si (E, T) est une représentation à croissance lente de G, T définit une distribution à valeurs dans $\mathcal{L}$(E), tempérée dans G; la transformée de FOURIER de cette distribution a comme support le spectre de la représentation (E, T); cette propriété permet de construire des sous-espaces fermés de E, invariants par T, de telle sorte que si (E, T) est irréductible, son spectre se réduit à un point de $\hat{G}$ et on conclut comme on l'a fait plus haut.

3. Soit maintenant E un espace *hilbertien*, dont la structure est définie par une forme hermitienne positive qu'on désignera par $(\mathbf{a} \mid \mathbf{b})$. On dit qu'une représentation (E, T) de G dans E est *unitaire* si tous les opérateurs T_x sont unitaires, ou ce qui revient au même, si l'adjoint $T_x^\star$ de T_x est $T_{x^{-1}}$ pour tout $x \in$ G. Une représentation unitaire (E, T) de G est bornée et son prolongement à $\mathcal{M}^1$ (G), défini par (2), est alors une représentation de l'algèbre involutive $\mathcal{M}^1$ (G) dans l'algèbre involutive $\overline{\mathcal{L}}$(E), c'est-à-dire que l'on a $T_\mu^\star = T_{\tilde{\mu}}$. Inversement, si T est une représentation continue de l'algèbre involutive normée L (G) dans l'algèbre involutive $\mathcal{L}$ (E), la représentation de G dans E qu'on en déduit, comme il a été dit au n° 1, est unitaire. La représentation régulière (L^2 (G), U) de G est évidemment unitaire.

Pour qu'une représentation unitaire (E, T) de G soit *irréductible, il faut et il suffit que la sous-algèbre formée des opérateurs* T_f *(*$f \in L^1$ (G), *ou* $f \in \mathcal{K}$ (G) *soit partout dense dans* $\mathcal{L}$ (E), muni de la topologie de convergence simple dans E (c'est la topologie dite forte).

Soit (E, T) une représentation unitaire du groupe G; on vérifie facilement que, pour tout $\mathbf{a} \in$ E, la fonction $x \to (\mathbf{a} \mid T_x . \mathbf{a})$ est de type positif dans G; plus généralement, si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs de E, la fonction $x \to (\mathbf{a} \mid T_x . \mathbf{b})$ appartient à $\mathcal{V}$ (G).

Cela étant, on appellera encore *représentation monogène* de G dans E l'objet (E, T, $\mathbf{a}$) formé d'une représentation monogène (E, T) et d'un générateur $\mathbf{a}$ de cette représentation; la fonction de type positif $x \to (\mathbf{a} \mid T_x . \mathbf{a})$ est dite *caractéristique* de la représentation (E, T, $\mathbf{a}$). Cette définition se justifie de la façon suivante: on dit que deux représentations monogènes (E, T, $\mathbf{a}$) et (E′, T', $\mathbf{a}'$) de G sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme A de l'espace hilbertien E sur l'espace hilbertien E′ tel que l'on ait $A . \mathbf{a} = \mathbf{a}'$ et $A . T_x = T'_x . A$ pour tout $x \in$ G: pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que les fonctions caractéristiques de* (E, T, **a**) *et* (E′, T', **a**′) *soient égales.*

En outre, *à toute fonction* $\varphi \in \mathfrak{P}$ (G) *correspond une représentation monogène de* G *ayant* φ *comme fonction caractéristique* (et dont, par suite, la classe d'équivalence est bien déterminée) [12, 14, 23].

Soit, en effet, $\varphi \in \mathfrak{P}$ (G); $(f|g) = \int \tilde{g} \star f(x) \overline{\varphi(x)}\, dx$ est une *forme sesquilinéaire et positive* dans L^1 (G); l'ensemble des $f \in L^1$ (G) telles que $(f|f) = 0$ est un idéal à gauche N (φ) et en complétant l'espace préhilbertien quotient L^1 (G)/N (φ), on obtient un espace hilbertien H (φ); si $x \in G$, l'application $f \to U_x \cdot f$ (resp $f \to \int f(x) \overline{\varphi(x)}\, dx$) se laisse prolonger par continuité, après passage aux quotients, en un endomorphisme unitaire $U(\varphi)_x$ de H (φ) (resp. une forme linéaire continue dans H (φ), qui s'identifie à un vecteur **a** $\in$ H (φ)); on obtient ainsi une représentation unitaire monogène (H (φ), U (φ), **a**) de G dont la fonction φ est caractéristique. Remarquons encore que la représentation de L^1 (G) dans $\mathcal{L}$ (H (φ)), qui correspondà cette représentation de G, s'obtient en associant à $g \in L^1$ (G) l'endomorphisme $U(\varphi)_g$ de H (φ) obtenu, après passage aux quotients, en prolongeant par continuité l'application $f \to g \star f$; $U(\varphi)_g$. **a** est la classe de $g \in L^1$ (G) modulo l'idéal N (φ).

Le procédé de construction qu'on vient de décrire s'étend facilement lorsqu'on substitue à la fonction $\varphi \in \mathfrak{P}$ (G) une *mesure de type positif* dans G, mais la représentation unitaire de G qu'on obtient ainsi n'est pas en général monogène. En appliquant ceci à la mesure définie par la masse 1 au point $e \in G$, on obtient naturellement la représentation régulière (L^2 (G), U). Tout ceci est susceptible de généralisations diverses, exposées en particulier dans les travaux de R. Godement [1].

Soit (E, T, **a**) une représentation unitaire monogène de G telle que $\|\mathbf{a}\| = 1$ et $\varphi \in \mathfrak{P}_0$ (G) sa fonction caractéristique; *pour que cette représentation soit irréductible, il faut et il suffit que* φ *soit un point extrémal du sous-ensemble convexe* $\mathfrak{P}_0$ (G) *de* L^∞ (G) (cf. § 2, n° 3) (c'est-à-dire un caractère de G lorsque ce groupe est abélien).

On peut ainsi montrer que *le groupe* G, *ainsi que son algèbre* L^1 (G), *est séparé par ses représentations unitaires irréductibles,*

[1] En dehors de [14], on pourra consulter R. Godement, Mémoire sur la théorie des caractères. *Journal Math. pures et appl.*, t. XXX, pp. 1-110 (1951).

résultat bien connu dans le cas des groupes compacts (et dans celui des groupes abéliens !).

Diverses généralisations du théorème de Bochner et de Plancherel-Weil permettent de réaliser la décomposition spectrale d'une représentation unitaire au moyen de représentations irréductibles ou de caractères. On se bornera ici à indiquer le résultat obtenu dans le cas, le plus simple, où le groupe G est *abélien*. Soit (E, T) une représentation unitaire de G; pour tout couple ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) de vecteurs de E, la fonction $x \to (\mathbf{a}, T_x \mid \mathbf{b})$ de $\mathcal{P}$(G) est, d'après le théorème de Bochner, transformée de Fourier d'une mesure $\mu_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$: les mesures $\mu_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ ont leurs supports contenus dans le spectre de (E, T); on les appelle les *mesures spectrales* relatives à la représentation (E, T). On a ainsi $(T_f \,.\, \mathbf{a} \mid \mathbf{b}) = \int \hat{f}(\hat{x})\, d\mu_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\hat{x})$ pour toute $f \in L^1(G)$. Les mesures spectrales permettent la décomposition de la représentation (E, T) suivant les caractères appartenant à son spectre (théorème de Stone) [14, 32].

Soit $\mathcal{I}(\hat{G})$ l'espace vectoriel formé par les fonctions définies dans G et intégrables pour toutes les mesures spectrales $\mu_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$; à toute fonction $f' \in \mathcal{I}(\hat{G})$ correspond un opérateur $T_{f'} \in \mathcal{L}(E)$, au moyen de la formule $(T_{f'} \,.\, \mathbf{a} \mid \mathbf{b}) = \int f'(\hat{x})\, d\mu_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\hat{x})$; $f' \to T_{f'}$, est une représentation de l'algèbre involutive $\mathcal{I}(\hat{G})$ dans $\mathcal{L}(E)$, telle que $\| T_{f'} \| \leqslant \|f'\|$. En particulier, si A′ est un ensemble borélien de $\hat{G}$ (que l'on peut supposer contenu dans le spectre de (E, T)), la formule $(E(A') \,.\, \mathbf{a} \mid \mathbf{b}) = \mu_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(A')$ définit un *projecteur* $E(A')$ de E (sur le « sous-espace spectral » de E, relatif à A′); si $x \in G$, on voit facilement que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition finie (A'_j) de G en ensembles boréliens, telle que l'on ait $\left| (\mathbf{a} \mid T_x \,.\, \mathbf{b}) - \sum_j \langle x, x_j \rangle (E(A'_j) \,.\, \mathbf{a} \mid \mathbf{b}) \right| \leqslant \varepsilon$ si $\hat{x}_j \in A'_j$, d'où $\| T_x - \sum_j \overline{\langle x, \hat{x}_j \rangle}\, E(A'_j) \| \leqslant \varepsilon$, formule qu'on écrit encore en vertu des propriétés des intégrales, sous la forme $T_x = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle}\, dE(\hat{x})$; on a de même $T_f = \int \hat{f}(\hat{x})\, dE(\hat{x})$ si $f \in L^1(G)$.

Remarquons enfin que d'après le théorème de Plancherel-Weil, $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme de l'espace hilbertien $L^2(G)$ sur l'espace hilbertien $L^2(\hat{G})$, isomorphisme qui à U_x (resp. U_f) fait correspondre l'opérateur de multiplication par le caractère x' de $\hat{G}$ (resp. $\hat{f}$); il est alors clair que la mesure spectrale relative à la représentation régulière de G, correspondant au couple (f, g) de fonctions de $L^2(G)$, est définie par $d\mu_{f,g}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, \overline{\hat{g}(\hat{x})}\, d\hat{x}$.