SUR LES DÉFINITIONS RELATIVES AUX BRANCHES FINIES

Autor(en): **Ehrhart, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32899

SUR LES DÉFINITIONS RELATIVES AUX BRANCHES FINIES

PAR

E. Ehrhart, professeur agrégé à Strasbourg

Les définitions classiques réunissent sous le même nom des objets assez disparates. Pour éviter cet inconvénient, nous proposons de préciser ces définitions par la notion de tangente.

1. *Direction asymptotique.* — Dire d'une branche infinie de courbe plane ou gauche, qu'elle a une direction asymptotique, c'est fournir un renseignement un peu vague. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer des courbes ayant des oscillations d'amplitude infinie, comme $Y = \sqrt{X} \sin X$ ou mieux encore $Y = X^{0,9} \sin X$, dont OX est pourtant direction asymptotique. On possède une indication bien plus précise, si l'on sait d'une branche de courbe que *la direction de sa tangente tend vers une limite* Δ, *quand son point de contact s'éloigne indéfiniment.* Nous proposons d'appeler Δ *directin asymptotique stricte.*

2. *Branche parabolique.* — Considérons une courbe oscillante, inscrite entre les paraboles $Y = \frac{\sqrt{X}}{10}$ et $Y = 10 \sqrt{X}$, ou mieux encore entre les courbes $Y = X^{0,9}$ et $Y = X^{0,1}$: elle a des oscillations d'amplitude infinie, qui s'accordent mal avec le qualificatif « parabolique ». Ces cas fâcheux sont écartés, si nous convenons d'appeler *strictement parabolique une branche qui possède une direction asymptotique stricte, et dont la tangente est rejetée à l'infini, quand son point de contact s'éloigne indéfiniment.*

3. *Asymptote.* — Si une branche infinie a une asymptote, son tracé finit par se confondre pratiquement avec cette droite.

Néanmoins la tangente à cette branche peut varier notablement, quand son point de contact s'éloigne indéfiniment, et la longueur d'un arc qu'on ne peut plus distinguer dans le graphique de sa projection *ab* sur l'asymptote, peut être nettement différente de la longueur *ab*, même à l'infini. Pensons, par exemple, à une courbe gauche qui s'enroule autour d'une droite en s'en rapprochant. On écarte ces cas d'exception en adoptant la définition suivante: *une branche infinie a une asymptote stricte* d, *si sa tangente a une position limite* d, *à distance finie*, *quand son point de contact s'éloigne indéfiniment.*

Par exemple, les trois courbes $Y = e^{-x} \sin x$, $Y = \frac{\sin x}{x}$, $Y = \frac{\sin x^2}{x}$ ont l'axe OX pour asymptote, mais elle n'est stricte que pour la première, puisque pour elle seulement $\overline{OT} = Y - xY'$ tend vers zéro, quand x tend vers l'infini par valeurs positives (T désigne le point d'intersection de la tangente avec OY). Pour la seconde, on peut remarquer que la différence $\overset{\frown}{AB} - ab$ tend cependant vers zéro, quand l'arc, de longueur finie $\overset{\frown}{AB}$, s'éloigne indéfiniment.

Remarque importante: *Pour une courbe algébrique, toute direction asymptotique, branche parabolique ou asymptote est stricte.* Cela résulte de l'étude classique de ses points à l'infini à partir de l'intersection avec une droite, mais cela est aussi un cas particulier de la proposition plus générale suivante.

THÉORÈME. — *Une direction asymptotique, une branche parabolique ou une asymptote sont toujours strictes, si la branche infinie de courbe plane, au-delà d'un point* O, *ne présente plus de point particulier* (anguleux, de rebroussement, double ou d'inflexion).

a) *Direction asymptotique.* — Limitons la branche au point O. Soit M son point courant et Δ la droite par O de direction asymptotique. La concavité restant fixe et les points doubles, anguleux ou de rebroussement étant exclus, OM tourne toujours dans le même sens. Comme OM tend vers Δ, la branche sera située entièrement d'un même côté de Δ à partir d'un point O′, auquel nous la limiterons dans toute la suite.

Soit M′ son point unique tel que MM′ = O′ M. La tangente t en M passe par l'angle extérieur M du triangle isocèle O′ MM′. Comme O′ M et O′ M′ ont pour direction limite Δ, il en est de même de t.

b) *Branche parabolique.* — Si en plus t est rejeté à l'infini avec M, la branche est donc strictement parabolique.

c) *Asymptote.* — Supposons que la branche (c) ait une asymptote Δ'. La tangente en O′ coupe Δ' en I, sans quoi (c) aurait un point d'inflexion. Par un point T du segment O′ I on peut mener à (c) juste deux tangentes TO′, TM. Le point de contact M est plus près de Δ' que T, sans quoi (c) présenterait des inflexions. Par suite, quand T tend vers I, la tangente TM tend vers Δ', qui est donc asymptote stricte.

Par exemple, les courbes exponentielle et logarithmique ont une asymptote stricte, qui est l'un des axes de coordonnées, et une branche parabolique stricte dans la direction de l'autre axe.

Remarque. — Ce théorème montre que *pratiquement* seules les courbes dont l'équation renferme des lignes trigonométriques peuvent présenter une branche parabolique ou une asymptote non strictes.

Conclusion. — Nous proposons de conserver les définitions habituelles relatives aux branches infinies, ainsi que la recherche pratique correspondante [1] mais d'ajouter chaque fois qu'il y a lieu le vocable « stricte », qui apporte une précision supplémentaire. En outre, il attire l'attention sur l'existence de deux sortes bien distinctes d'asymptotes; une asymptote stricte possède toutes les propriétés d'une tangente, comme cela est bien connu pour les propriétés tangentielles de l'hyperbole.

---

[1] Dans certains cas cependant, cette recherche peut être plus facile en partant directement de la notion de tangente. Il en est ainsi, par exemple, si y' a une expression plus simple que $\frac{y}{x}$, ou si la courbe a été obtenue comme enveloppe d'une droite variable.