Premières définitions. Notations.

ALGÈBRE DES POLYNOMES

PAR

Marc Zamansky, Paris

Introduction

L'objet de cet article est de présenter les propriétés algébriques fondamentales des êtres qu'on appelle polynômes à une indéterminée ou improprement, polynômes à une variable.

On n'y trouvera que des résultats élémentaires bien connus (sauf peut-être celui qui concerne le lien entre les deux divisions) mais tout ce qui pourrait rappeler l'analyse a été banni de la présentation car la confusion de notations entraîne souvent chez les jeunes étudiants la confusion des concepts et des propriétés.

Premières définitions. Notations.

Définition d'un polynôme

On appelle polynôme un ensemble ordonné d'une infinité dénombrable de nombres (réels ou complexes) tous nuls à partir d'un certain rang.

Nous représenterons au début un polynôme par $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. Les nombres a_k sont appelés *coefficients* et dans cette écriture l'entier k repère le rang d'ordre du coefficient (a_k est le $(k+1)^{\underline{e}}$ coefficient).

Nous désignons aussi un polynôme par une seule lettre et écrirons:

$$\mathrm{A} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) .$$

Egalité de deux polynômes

Deux polynômes $A = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ et $B = (b_0, b_1, ..., b_m, 0, ...)$ seront dits égaux si quel que soit k: $a_k = b_k$, $(k \geqslant 0)$. Cette définition entraîne qu'à partir du même rang a_k et b_k sont nuls.

On écrira $A = B$, le symbole $=$ pouvant alors être employé de nouveau.

Lois algébriques sur l'ensemble des polynomes

Lois internes

Les conventions suivantes construisent des polynômes à partir de polynômes; elles définissent ce qu'on appelle des *lois internes*. Ce seront l'*addition* et la *multiplication*. Leur définition entraîne des propriétés qui feront de l'ensemble des polynômes muni de ces deux lois, un *anneau commutatif unitaire*.

1° *Addition.*

Soit $A = (a_0, a_1, ...)$, $B = (b_0, b_1, ...)$, deux polynômes. Par définition le polynôme $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_k + b_k, ...)$ est appelé *somme* de A et B et on écrit:

$$A + B = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_k + b_k, ...) .$$

Les propriétés des nombres complexes montrent que cette addition est *associative*, c'est-à-dire que $(A + B) + C = A + (B + C)$ et *commutative*, c'est-à-dire que $A + B = B + A$, quels que soient A, B, C.

Désignons par Θ le polynôme dont tous les coefficients sont nuls: $a_k = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ...$ On a alors quel que soit le polynôme A:

$$A + \Theta = \Theta + A = A$$

Θ est donc l'*élément neutre* pour l'addition.

Désignons par $(-A)$ le polynôme $(-a_0, -a_1, ..., -a_k, ...)$. On a alors: $A + (-A) = \Theta$. Donc tout polynôme A a un *symétrique* $(-A)$ pour l'addition.