

# division euclidienne

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

déduite de la précédente division, puis nous montrerons que les deux divisions peuvent être ramenées l'une à l'autre.

## LA DIVISION EUCLIDIENNE

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes. Soit  $B \neq 0$ . Si  $A = 0$ , on a  $A = B \cdot 0$  donc  $A$  est divisible par  $B$ . Supposons  $A \neq 0$  et parmi tous les polynômes  $A - BX$  soit  $A - BQ$  tel que  $\deg(A - BQ) \leq \deg(A - BX)$  quel que soit  $X$ , lorsque  $A$  n'est pas divisible par  $B$ .

Montrons que 1°:  $\deg(A - BQ) < \deg B$ ; 2°  $Q$  est unique.

1° Soit en effet:

$$B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p \quad (b_p \neq 0)$$

$$A - BQ = c_0 e_0 + \dots + c_p e_p + \dots + c_m e_m$$

et supposons  $m > p$  et  $c_m \neq 0$ ,  $m$  étant le plus petit degré possible de tous les polynômes  $A - BX$ .

On a alors:

$$e_{m-p} B = b_0 e_{m-p} + \dots + b_p e_m$$

$$\frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = \frac{b_0 c_m}{b_p} e_{m-p} + \dots + \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} e_{m-1} + c_m e_m.$$

D'où

$$A - BQ - \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = A - B \left( Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} \right) =$$

$$= c_0 e_0 + \dots + \left( c_{m-1} - \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} \right) e_{m-1}.$$

$Q'$  désignant le polynôme  $Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}$ ,  $A - BQ'$  serait de degré  $< m$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur  $m$ . L'hypothèse  $m \geq p$  est donc incompatible avec "  $m$  est le plus petit degré possible de tous les  $A - BX$ ". On a donc  $m < p$ , c'est-à-dire  $\deg(A - BQ) < \deg B$ .

2° Si existait  $Q' \neq Q$  tel que  $\deg(A - BQ') \leq \deg(A - BX)$  quel que soit  $X$ , on aurait  $\deg(A - BQ') < \deg B$  d'après ce qui précède. Donc

$$\deg(A - BQ - (A - BQ')) = \deg B (Q' - Q) < \deg B.$$

Or si on suppose  $Q' \neq Q$ , on a  $\deg(Q' - Q) \geq 0$ , donc  $\deg B(Q' - Q) \geq \deg B$  ce qui contredit  $\deg B(Q' - Q) < \deg B$ . Nécessairement  $Q' = Q$ .

D'où :

THÉORÈME. — *Etant donnés deux polynômes A et B, B  $\neq$  0 il existe un polynôme Q et un seul tel que  $A - BQ = 0$  ou bien tel que  $\deg(A - BQ) \leq \deg(A - BX)$  quel que soit le polynôme X ; de plus dans le second cas  $\deg(A - BQ) < \deg B$ .*

Ce résultat peut alors être écrit :

$$A = BQ + R, \quad \deg R < \deg B$$

où le couple Q, R est unique. Q est le *quotient*, R le *reste*.

On notera que la première partie de la démonstration fournit la méthode pratique bien connue.

#### LA DIVISION SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES

Soit  $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$  un polynôme non nul, de degré  $n$  ( $a_n \neq 0$ ). Appelons polynôme *transposé* de A le polynôme  $\bar{A} = a_n e_0 + a_{n-1} e_1 + \dots + a_0 e_n$ . Quel que soit  $A \neq 0$ ,  $\nu(\bar{A}) = 0$  et  $\deg \bar{A} = \deg A - \nu(A)$ ; on a donc  $\deg \bar{A} \leq \deg A$ .

Cherchons les propriétés de l'opération qui à A associe  $\bar{A}$  relativement au produit de A par une croissante  $\alpha$ , à la somme  $A + B$ , au produit AB.

1° Si  $\alpha \neq 0$ , on a  $\overline{(\alpha A)} = \alpha \bar{A}$ .

2° Soit  $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$  ( $a_n \neq 0$ ) et  $B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p$  ( $b_p \neq 0$ ) et supposons par exemple  $\deg A = n \geq \deg B = p$ .

Remarquons que quel que soit  $h$ ,  $\overline{(e_h A)} = \bar{A} e_0$

a) Si  $\deg A = n > p = \deg B$ , on a :

$$\overline{(A + B)} = \bar{A} + e_{n-p} \bar{B}$$

b) Si  $\deg A = n = p = \deg B$  et si  $\deg(A + B) = \deg A$  (c'est-à-dire si  $a_n + b_n \neq 0$ ), on a :

$$\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$$

c) Si  $\deg A = \deg B$  et si  $\deg(A + B) < \deg A$  (c'est-à-dire si  $a_n + b_n = 0$ ), soit alors  $m = \deg(A + B) < n$ .