

# ZWEI LIMITATIONSSÄTZE ÜBER BEREICH- INTEGRALE

Autor(en): **Wendelin, Hermann**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-35497>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ZWEI LIMITATIONSSÄTZE ÜBER BEREICH-INTEGRALE

von Hermann WENDELIN, Graz

(Reçu le 10 avril 1959)

Im folgenden werden zwei Limitationssätze für mehrdimensionale Jordansche Integrale über Jordan-messbaren Punktmengen als Integrationsbereiche entwickelt. Die in den Sätzen formulierten hinreichenden Bedingungen sind handlich und führen durch einfache Spezialisierungen auf in den meisten ausführlicheren Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung anzutreffende Limitationssätze. Dem allgemeineren zweiten Satz wird aus beweistechnischen Gründen der speziellere erste Satz vorangestellt.

Wir führen vorerst, lediglich zur Vereinfachung der Formulierungen und Beweisführungen einige abkürzende Bezeichnungen ein: <sup>1)</sup>

1. Sind  $F(u)$ ,  $G(u, \nu)$ , ... Aussagen, die von  $u$ , bzw. von  $u$  und  $\nu$ , ... abhängen, so bedeute

„ $\forall u: F(u)$ “: „Für alle  $u$  gilt  $F(u)$ “

schärfer

„ $\forall u: F(u)$ “: „Für alle  $u$  aus der Menge  $\mathfrak{M}$  gilt  $F(u)$ “.  
 $\in \mathfrak{M}$

Ähnlich ist

„ $\forall u, \forall \nu: G(u, \nu)$ “ oder „ $\forall u, \nu: G(u, \nu)$ “, ...

zu interpretieren.

„ $\exists u: F(u)$ “: „Es existiert ein  $u$ , sodass  $F(u)$ “, usf.

---

<sup>1)</sup> Also keineswegs mit dem Anspruch auf logistische Darstellung, die natürlich ganz anders aussehen müsste.

2. Sind  $A_1, A_2, \dots, A_k$  und  $B$  Aussagen, so bedeute  
 „ $A_1, A_2, \dots, A_k \longrightarrow B$ “: „Aus  $A_1$  und  $A_2$  und ... und  
 $A_k$  folgt  $B$ “.

3. Tritt im Laufe eines Beweises über einem „ $=$ “ Zeichen die Nummer einer Formel Definition oder Voraussetzung auf, so bedeutet dies, dass der rechts vom „ $=$ “-Zeichen stehende Ausdruck vermöge der Formel aus dem linksstehenden hervorgeht. Z.B. bedeutet

( $n$ )  
 „ $A = B$ “: „ $B$  geht vermöge ( $n$ ) aus  $A$  hervor.“

(Diese Schreibweise soll nur gelegentlich zur Erleichterung der Einsicht verwendet werden, wobei kein Wert auf vollständiges Zitieren aller gerade in Betracht kommenden Voraussetzungen gelegt wird.)

4. „ $A = B$ “: „ $B$  wird durch  $A$  definiert“.  
 Df

5. Ist  $\mathfrak{B}$  Punktmenge eines  $n$ -dimensionalen euklidisch-metrischen Raumes, so bedeute  $J_n[\mathfrak{B}]$  den  $n$ -dimensionalen Jordanschen Inhalt von  $\mathfrak{B}$ .

6. „beschr.  $\langle f(P), \mathfrak{B} \rangle$ “: „ $f(P)$  ist auf  $\mathfrak{B}$  beschränkt“  
 (d.h.  $\exists M, \forall P: |f(P)| \leq M$ )  
 $> 0 \in \mathfrak{B}$

7. „stet.  $\langle f(P), \mathfrak{B} \rangle$ “: „ $f(P)$  ist auf  $\mathfrak{B}$  stetig.“

Wir erklären nun

Def. 1. { Sei  $B$  eine reelle Zahlenmenge, deren Elementen  $\beta$  eindeutig eine Jordan-messbare Punktmenge  $\mathfrak{B}(\beta)$  zugeordnet werde. Die Menge all dieser  $\mathfrak{B}(\beta)$  werde mit  $\mathfrak{b}$  bezeichnet.  $B'$  sei die Menge der Häufungspunkte von  $B$ .

Def. 2. { Für irgend zwei Elemente  $\beta'$  und  $\beta''$  aus  $B$  bedeute  $\mathfrak{D}(\beta', \beta'') = \mathfrak{B}(\beta') - \mathfrak{B}(\beta')$ .  $\mathfrak{B}(\beta'')$ <sup>1)</sup>  
 Df

1) Wobei  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  den Durchschnitt der Menge  $\mathfrak{A}$  mit der Menge  $\mathfrak{B}$  bedeute.

Ich merke an

(A. 1.) { Im allgemeinen ist  $\mathfrak{D}(\beta', \beta'') \neq \mathfrak{D}(\beta'', \beta')$

Es bedeute ferner

Def. 3.  $\left\{ \begin{array}{l} E(b) = \forall \beta', \beta'' : J_n [\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = 0 \\ \text{Df} \quad \in B \\ \text{oder } J_n [\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0 \text{ } ^1) \end{array} \right.$

Es werde nun folgender Hilfssatz bewiesen:

(H. S.)  $\left\{ \begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{l} E(b), \beta_0 \in B', \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n [\mathfrak{B}(\beta)] = c \text{ (endlich)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\beta' \rightarrow \beta_0} J_n [\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = \lim_{\beta' \rightarrow \beta_0} J_n [\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0 \\ \beta'' \rightarrow \beta_0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \longrightarrow \\ 2. \left\{ \begin{array}{l} E(b), \beta_0 \in B \cdot B', \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n [\mathfrak{B}(\beta)] = J_n [\mathfrak{B}(\beta_0)] \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n [\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n [\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \longrightarrow \end{array} \right.$

*Beweis von (H. S.):*

*Ad 1.*

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}(\beta') = \mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'') + \mathfrak{D}(\beta', \beta'') \\ \mathfrak{B}(\beta'') = \mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'') + \mathfrak{D}(\beta'', \beta') \end{array} \right.$$

Die Summanden rechts sind elementfremd, daher gilt sicher

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n [\mathfrak{B}(\beta')] = J_n [\mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'')] + J_n [\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] \\ J_n [\mathfrak{B}(\beta'')] = J_n [\mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'')] + J_n [\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] \end{array} \right.$$

Subtraktion und Absolutbetragsbildung ergibt hieraus

$$| J_n [\mathfrak{B}(\beta')] - J_n [\mathfrak{B}(\beta'')] | = | J_n [\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] - J_n [\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] |$$

daher

$$(3) \quad | J_n [\mathfrak{B}(\beta')] - J_n [\mathfrak{B}(\beta'')] | \geq \text{und} \quad \begin{array}{l} J_n [\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] \\ J_n [\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] \end{array} \geq 0.$$

<sup>1)</sup> Bekanntlich existieren mit  $J_n [\mathfrak{B}_1]$  und  $J_n [\mathfrak{B}_2]$  auch  $J_n [\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2]$ ,  $J_n [\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2]$  und  $J_n [\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2]$ .

Wegen der Voraussetzungen unter 1. in (H. S.) gibt es zu dem beliebig gewählten  $\varepsilon > 0$  eine reduzierte Umgebung  $\mathfrak{U}(\beta_0)$ , — das heisst: eine Umgebung von  $\beta_0$ , die nur den Punkt  $\beta_0$  nicht enthält, — sodass für alle  $\beta'$  und  $\beta'' \in \mathfrak{U}(\beta_0)$  gilt:

$$(4) \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] - c| < \frac{\varepsilon}{2},$$

daher, da

$$J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] = (J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - c) - (J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] - c)$$

ist,

$$(5) \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')]| < \varepsilon.$$

(3), (5)  $\longrightarrow$

$$(6) \quad 0 \leq J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] < \varepsilon \quad \text{und} \quad 0 \leq J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] < \varepsilon,$$

woraus schliesslich folgt

$$\lim_{\substack{\beta' \rightarrow \beta_0 \\ \beta'' \rightarrow \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = \lim_{\substack{\beta' \rightarrow \beta_0 \\ \beta'' \rightarrow \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0.$$

*Ad 2.*

Setzt man in (3) anstelle von  $\beta'$  und  $\beta''$ :  $\beta$  und  $\beta_0$ , so erhält man

$$(7) \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta)] - J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)]| \geq \frac{J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)]}{J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)]} \quad \text{und} \quad \geq 0.$$

Zufolge der Voraussetzungen unter 2. in (H. S.) ergibt  $\lim_{\beta \rightarrow \beta_0}$  — Bildung des linken Termes von (7) Null, also ist

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] = 0.$$

Wir können jetzt den Satz beweisen.

$$\text{Satz 1.} \left\{ \begin{array}{l} V_{1,1} \cdot 1) \quad E(b), \beta_0 \in B \cdot B' \text{ und} \\ \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] = J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)] \\ V_{1,2} \quad \text{beschr. } \langle f(P), \bigvee_{\beta \in B} \mathfrak{B}(\beta) \rangle^2 \\ V_{1,3} \quad \bigvee_{\beta \in B} \mathfrak{B} : \exists \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P) d\tau \\ V_{1,1}, V_{1,2}, V_{1,3} \longrightarrow \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \end{array} \right.$$

*Beweis von Satz 1.*

Unter Beachtung, dass unter den gemachten Voraussetzungen mit  $\int_{\mathfrak{B}} f(P) d\tau$ ,  $\int_{\mathfrak{B}_0} f(P) d\tau$  auch  $\int_{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}_0} f(P) d\tau$  und  $\int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0} f(P) d\tau$  existiert, hat man mit  $M$  als oberer Schranke für  $|f(P)|$  in  $\bigvee_{\beta \in B} \mathfrak{B}(\beta)$ :

Def. 2.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \right| &= \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta) \cdot \mathfrak{B}(\beta_0) + \mathfrak{D}(\beta, \beta_0)} f(P) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta) \cdot \mathfrak{B}(\beta_0) + \mathfrak{D}(\beta_0, \beta)} f(P) d\tau \right| = \\ &= \left| \int_{\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)} f(P) d\tau - \int_{\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)} f(P) d\tau \right| \leq \left| \int_{\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)} f(P) d\tau \right| + \left| \int_{\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)} f(P) d\tau \right| \leq \\ &\leq M \{ J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] + J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] \}, \end{aligned}$$

also

$$(8) \quad \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \right| \leq M \{ J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] + J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] \}.$$

Nun verschwindet aber hierin unter Beachtung von  $V_{1,1}$  und (H. S.) 2. für  $\lim_{\beta \rightarrow \beta_0}$ -Bildung die rechte Seite, also gilt Gleiches auch

1)  $V_{i,h}$  ist die Bezeichnung der rechts stehenden Voraussetzungen.

2)  $\bigvee_{\beta \in B} \mathfrak{B}(\beta)$  bedeute die Vereinigungsmenge aller  $\mathfrak{B}(\beta)$ ,  $\beta \in B$ .

für die linke Seite, d.h. es ist

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau, \quad \text{w. z. z. w.}$$

*Eine Anwendung von Satz 1.*

Sei  $f(x)$  über  $[a, b]$  integrierbar und  $\beta_0 \in [a, b]$ . Dann gilt

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^{\beta_0} f(x) dx$$

Zum Beweis setze man in Satz 1. für  $\mathfrak{B}(\beta) = [a, \beta]$ ,  $\beta_0 \in [a, b]$ . Die  $\mathfrak{B}(\beta)$  erfüllen dann die Bedingung E (b) und es ist  $\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_1[\mathfrak{B}(\beta)] = J_1[\mathfrak{B}(\beta_0)]$ , also  $V_{1,1}$  erfüllt. Dass auch  $V_{1,2}$  und  $V_{1,3}$  gelten, ist unmittelbar ersichtlich.

Satz 2. {

$$\left. \begin{array}{l} V_{2,1}. \forall \beta: \mathfrak{B}(\beta) \subset \mathfrak{B} \text{ und } J_n(\mathfrak{B}) \neq 0. \text{ } ^1) \\ \quad \quad \quad \in B \\ V_{2,2}. \text{ beschr. } \langle f(P, \alpha), \mathfrak{B}, A \rangle, \text{ wobei } P \in \mathfrak{B} \text{ und} \\ \quad \quad \quad \alpha \in A \text{ (} A \text{ reelle Zahlenmenge)} \\ V_{2,3}. \forall \alpha: \exists \int_{\mathfrak{B}} f(P, \alpha) d\tau \\ \quad \quad \quad \in A \\ V_{2,4}. \forall P: \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(P, \alpha) = \varphi(P) \text{ gleichmässig in } P \\ \quad \quad \quad \in \mathfrak{B} \\ V_{2,5}. \exists \int_{\mathfrak{B}} \varphi(P) d\tau. \\ \\ V_{2,1}: V_{2,2}, V_{2,3}, V_{2,4}, V_{2,5} \longrightarrow \\ \left. \begin{array}{l} 1. \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_1}} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \\ 2. \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \\ 3. \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \end{array} \right\} = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P) d\tau.$$

<sup>1)</sup> „ $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ “ bedeute „ $\mathfrak{U}$  ist Teilmenge von  $\mathfrak{B}$ “.

## Beweis von Satz 2.

Ad 1.

$$(9) \quad \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f \varphi(P) d\tau \right| = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} [f - \varphi] d\tau + \left[ \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f \varphi d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f \varphi d\tau \right] \right|$$

also mit den Abkürzungen

$$(10) \quad \begin{cases} \Theta(\alpha, \beta) = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f \varphi(P) d\tau \right| \\ \Phi(\alpha, \beta) = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} [f(P, \alpha) - \varphi(P)] d\tau \right| \\ \Psi(\beta) = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f \varphi(P) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f \varphi(P) d\tau \right|, \end{cases}$$

daher

$$(11) \quad 0 \leq \Theta(\alpha, \beta) \leq \Phi(\alpha, \beta) + \Psi(\beta).$$

Wir untersuchen erst  $\Phi$ , dann  $\Psi$ .Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Ich setze

$$(12) \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{Df \cdot 2 \cdot J_n(\mathfrak{B})}.$$

Wegen  $V_{2,4}$  gibt es dann eine reduzierte Umgebung  $\mathfrak{U}(\alpha_0)$  von  $\alpha_0$ , sodass

$$(13) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \forall P \in \mathfrak{B} : |f(P, \alpha) - \varphi(P)| < \varepsilon^*$$

ausfällt, umsomehr als wegen  $\forall \beta \in \mathfrak{B} : \mathfrak{B}(\beta) \subset \mathfrak{B}$ 

$$(14) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in \mathfrak{B} \quad \forall P \in \mathfrak{B}(\beta) : |f(P, \alpha) - \varphi(P)| < \varepsilon^*,$$

Das ergibt

$$(15) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in \mathfrak{B} : 0 \leq \Phi(\alpha, \beta) \leq J_n[\mathfrak{B}(\beta)] \cdot \varepsilon^* \leq J_n(\mathfrak{B}) \cdot \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$(a) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \\ \forall \beta \in \mathfrak{B} \end{cases} : 0 \leq \Phi(\alpha, \beta) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus  $V_{2,2}$  folgt auch für die Limesfunktion  $\varphi(P)$ :

$$(16) \quad \text{beschr. } \langle \varphi(P), \mathfrak{B} \rangle, \text{ umsomehr also wegen } V_{2,1}:$$

$$(17) \quad \text{beschr. } \langle \varphi(P), \forall \beta \in \mathfrak{B} \rangle.$$



Wegen  $V_{2,5}$  gilt auch

$$(18) \quad \forall \beta: \exists f \varphi(P) d\tau . \\ \in B \quad \mathfrak{B}(\beta)$$

(17) besagt, dass  $V_{1,2}$  für  $\varphi(P)$ , (18) dass  $V_{1,3}$  erfüllt ist, aber auch  $V_{1,1}$  ist wegen  $V_{2,1}$  für  $\varphi(P)$  erfüllt.

Satz 1. auf  $\varphi(P)$  angewendet ergibt daher

$$(19) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} \varphi(P) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P) d\tau, \text{ d.h.}$$

$$(20) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \Psi(\beta) = 0;$$

oder, was damit gleichwertig ist:

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine reduzierte Umgebung } \mathfrak{U}(\beta_0) \text{ von } \beta_0, \text{ sodass} \\ \forall \beta: 0 \leq \Psi(\beta) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \\ \in \mathfrak{U}(\beta_0) \end{array} \right.$$

(a), (b)  $\longrightarrow$

$$(21) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in \mathfrak{U}(\beta_0) : 0 \leq \Phi(\alpha, \beta) + \Psi(\beta) < \varepsilon.$$

Wegen (11) gilt also auch

$$(22) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in \mathfrak{U}(\beta_0) : 0 \leq \Theta(\alpha, \beta) < \varepsilon,$$

d.h.  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0, \beta \rightarrow \beta_0} \Theta(\alpha, \beta) = 0$ , somit nach (10):

$$\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0$$

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f \varphi(P) d\tau,$$

also Satz 2., 1.

Ad 2.

Die für  $f(P, \alpha)$  und  $\varphi(P)$  gemachten Voraussetzungen  $V_{2,3}$ ,  $V_{2,4}$  und  $V_{2,5}$  ermöglichen die Anwendung eines bekannten Vertauschungssatzes, wonach

$$(23) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f \varphi(P) d\tau$$

und also auch

$$(24) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f \varphi(P) d\tau \right| = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f \varphi(P) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f \varphi(P) d\tau \right| = \Psi(\beta)$$

gilt.

Nochmalige Limitation hierin nach  $\beta$  liefert

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \right| = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \Psi(\beta) \stackrel{(20)}{=} 0,$$

was angesichts dessen, dass  $\int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau$  eine Konstante ist, die Behauptung unter Satz 2., 2. ergibt.

Ad 3.

$f(P, \alpha)$  erfüllt zunächst  $V_{1,2}$  und  $V_{1,3}$  von Satz 1. für alle  $\alpha$ , desgleichen aber auch  $V_{1,3}$ , dies, da aus  $V_{2,3}$  auch

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B: \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau$$

folgt. In Satz 1. anstelle von  $f(P)$ :  $f(P, \alpha)$  gesetzt, führt auf

$$(25) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P, \alpha) d\tau,$$

sodass auch

$$(26) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \right| = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \right|$$

wird. Aus denselben Gründen, die (23) legitimierten, trifft wieder

$$(27) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P, \alpha) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \text{ zu.}$$

(26), (27)  $\longrightarrow$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \right| = \left| \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P, \alpha) d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau \right| = 0,$$

d.h., es gilt auch Satz 2., 2.

- (A. 2.)  $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Setzt man in Satz 2. } A = B \text{ und lässt } \alpha_0 \text{ mit } \beta_0 \\ \text{zusammenfallen, so erhält man unter im übrigen} \\ \text{gleichen Voraussetzungen wie dort} \\ \\ \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\alpha)} f(P, \alpha) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\alpha_0)} f(P) d\tau. \\ \\ \text{(Eine bekannte Beziehung.)} \\ 2. \text{ Satz 1. stellt einen Spezialfall von Satz 2. dar.} \end{array} \right.$

Führt man die Definition ein:

$$E^*(b) =_{\text{Df}} \forall \beta', \beta'' : \left\{ \mathfrak{B}(\beta') \prec \mathfrak{B}(\beta'') \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}(\beta'') \prec \mathfrak{B}(\beta') \right\},$$

$\in B$

so gilt die manchmal nützliche Beziehung

$$(A. 3.) \quad \{ E^*(b) \longrightarrow E(b) \}$$

wie die folgenden Überlegungen sofort lehren:

$$E^*(\mathfrak{B}) \rightarrow \begin{array}{l} \mathfrak{D}(\beta', \beta'') = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D}(\beta'', \beta') = 0'' \longrightarrow \\ \mathfrak{I}_n[(\beta', \beta'')] = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{I}_n[(\beta'', \beta')] = 0. \end{array}$$

Schliesslich können wir noch aufgrund von Satz 2. beweisen:

$$(A. 4.) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_I. \quad \text{stet. } \langle f(x, \alpha), [a, b], A \rangle \text{ und beschr.} \\ \quad \langle f(x, \alpha), [a, b], A \rangle \\ V_{II}. \quad \text{stet. } \langle \varphi(\beta), B \rangle, \text{ stet. } \langle \Phi(\gamma), C \rangle \text{ und} \\ \quad \forall \beta \in B \quad \varphi(\beta) \in [a, b], \quad \forall \gamma \in C \quad \Phi(\gamma) \in [a, b] \\ V_{III}. \quad \alpha_0 \in A \cdot A', \quad \beta_0 \in B \cdot B', \quad \gamma_0 \in C \cdot C' \\ V_{IV}. \quad \forall x: \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) = f(x, \alpha_0) \text{ gleichmässig in } x. \\ \quad \in [a, b] \\ V_I, V_{II}, V_{III}, V_{IV} \longrightarrow \\ (F) \lim_{\delta_1 \rightarrow \delta_{10}} \lim_{\delta_2 \rightarrow \delta_{20}} \lim_{\delta_3 \rightarrow \delta_{30}} \lim_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} \int f(x, \alpha) dx = \\ \quad = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0 \\ \gamma \rightarrow \gamma_0}} \int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \int_{\varphi(\beta_0)}^{\Phi(\gamma_0)} f(x, \alpha_0) dx, \\ \text{worin } (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \text{ bzw. } (\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30}) \text{ eine beliebige} \\ \text{Anordnung der drei Parameter } \alpha, \beta, \gamma, \text{ bzw. von} \\ \alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \text{ ist.} \end{array} \right.$$

*Beweis von (A. 4.).*

Es ist, wenn  $c \in (a, b)$ :

$$(28) \quad \int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \int_{\varphi(\beta)}^c f(x, \alpha) dx + \int_c^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx.$$

Ich betrachte zuerst  $\int_{\varphi(\beta)}^c f(x, \alpha) dx$ .

Die Mengen  $B(\beta)$  sind hier durch die von  $\beta$  abhängigen Integrationsintervalle  $[\varphi(\beta), c]$ , bzw.  $[c, \varphi(\beta)]$  gegeben und erfüllen offenbar die Voraussetzung  $V_{2,1}$ ; ebenso erfüllt  $f(x, \alpha)$  aufgrund der für sie gemachten Voraussetzungen die entsprechenden Voraussetzungen von Satz 2, wenn man dort  $x$  anstelle von  $P$  und  $f(x, \alpha_0)$  anstelle von  $\varphi(P)$  schreibt. Daher ist nach Satz 2.:

$$(29) \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} \int_{\varphi(\beta)}^C f(x, \alpha) dx = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\varphi(\beta)}^C f(x, \alpha) dx = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\varphi(\beta)}^C f(x, \alpha) dx = \\ = \int_{\varphi(\beta_0)}^C f(x, \alpha_0) dx .$$

Da hierin sämtliche Ausdrücke von  $\gamma$  unabhängig sind, folgt aus (29) weiter durch  $\gamma = \text{Limitation}$ :

$$(30) \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0 \\ \gamma \rightarrow \gamma_0}} \int_{\varphi(\beta)}^C f(x, \alpha) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow \delta_{10}} \lim_{\delta_2 \rightarrow \delta_{20}} \lim_{\delta_3 \rightarrow \delta_{30}} \int_{\varphi(\beta)}^C f(x, \alpha) dx = \int_{\varphi(\beta_0)}^C f(x, \alpha_0) dx .$$

Ganz ebenso verfährt man mit dem zweiten Integral der rechten Seite von (28) und erhält

$$(31) \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0 \\ \gamma \rightarrow \gamma_0}} \int_C^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow \delta_{10}} \lim_{\delta_2 \rightarrow \delta_{20}} \lim_{\delta_3 \rightarrow \delta_{30}} \int_C^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \int_C^{\Phi(\gamma_0)} f(x, \alpha_0) dx .$$

(30), 31  $\longrightarrow$  (A. 4.), w. z. z. w.