

## § 3. Equations fonctionnelles.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## § 3. EQUATIONS FONCTIONNELLES.

Considérons la transformation linéaire  $F_0$  du plan en lui-même qui change  $S_i^0$  en  $S_i^1$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Elle change  $S_h^n$  en  $S_h^{n+1}$  ( $h = 0, 1, \dots, 2^n$ ), comme on le vérifie immédiatement par récurrence. Par suite, elle change  $M(h2^{-n})$  en  $M(h2^{-n-1})$  et l'on en déduit, par continuité, pour  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$F_0 M(t) = M\left(\frac{t}{2}\right).$$

D'une manière analogue, si  $F_1$  est la transformation linéaire du plan en lui-même qui change  $S_i^0$  en  $S_{i+1}^0$  ( $i = 0, 1, 2$ ), on voit que

$$F_1 M(t) = M\left(\frac{1+t}{2}\right).$$

Il est facile de calculer les coordonnées  $(x_a, y_a)$  de l'image du point  $(x, y)$  par la transformation  $F_a$  ( $a = 0, 1$ ), ainsi que le coefficient angulaire  $m_a$  de l'image d'une droite de coefficient angulaire  $m$ ; on trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \alpha x + \beta_1 y, \\ y_0 = \beta_1 y, \\ m_0 = \frac{\gamma_1 m}{1 + \gamma_1 m}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta_2 x + 1 - \beta_2, \\ y_1 = \beta_2 x + \alpha y + \beta_1, \\ m_1 = \frac{\gamma_2 + m}{\gamma_2}. \end{array} \right.$$

On a, par suite, les équations fonctionnelles

$$\left. \begin{array}{l} x\left(\frac{t}{2}\right) = \alpha x(t) + \beta_1 y(t) \quad x\left(\frac{1+t}{2}\right) = \beta_2 x(t) + 1 - \beta_2 \\ y\left(\frac{t}{2}\right) = \beta_1 y(t) \quad y\left(\frac{1+t}{2}\right) = \beta_2 x(t) + \alpha y(t) + \beta_1 \end{array} \right\} \quad (13)$$

ainsi que

$$m\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\gamma_1 m(t)}{1 + \gamma_1 m(t)}, \quad m\left(\frac{1+t}{2}\right) = \frac{\gamma_2 + m(t)}{\gamma_2}.$$

J'ai établi et utilisé ces équations fonctionnelles, pour le cas où  $\gamma_1 = \gamma_2$ , dans l'article de 1956 cité plus haut. Considérons ici le cas particulier où

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \left( \text{et } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2} \right).$$

Comme

$$\gamma_2 x'(t) + \gamma_1 y'(t) = 1,$$

on peut poser

$$\gamma_1 y'(t) = f(t), \quad \gamma_2 x'(t) = 1 - f(t).$$

Par substitution dans les relations dérivées de (13), il vient

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \gamma_1 f(t), \quad f\left(\frac{1+t}{2}\right) = \gamma_1 + (1 - \gamma_1) f(t).$$

J'ai montré que  $f(t)$  est la seule fonction bornée satisfaisant à ces équations, ce qui en fournit une définition très simple, et pour  $\gamma_1 \neq \frac{1}{2}$  c'est une fonction singulière déjà étudiée par plusieurs auteurs (voir mon article de 1957 cité plus haut, où l'on trouvera aussi quelques indications bibliographiques).