

1. Points où f admet un extremum.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1. POINTS OÙ f ADMET UN EXTREMUM.

Soit

$$x = \dots, x_1 x_2 \dots x_n \dots \quad (2)$$

un développement de x en numération binaire (il y en a deux quand x est un nombre binaire), et soit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \varphi(2^k x). \quad (3)$$

Minima relatifs.

Si $a = \dots, a_1 a_2 \dots a_n = p2^{-n}$ (p entier), on a $f_{n-1}(a) = f_n(a) = \dots = f(a)$ et réciproquement. Pour m assez grand ($m \geq 2n$), f_m admet en a un minimum relatif; comme $f \geq f_m$ et $f(a) = f_m(a)$, f admet également en a un minimum relatif. Inversement, si $f(x)$ est le minimum de f sur un segment $[a, a'] = [p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$, n impair, les relations

$$f(x) \geq f_{n-1}(x), \quad f(a) = f_{n-1}(a), \quad f(a') = f_{n-1}(a')$$

jointes au fait que f_{n-1} est linéaire et non constant sur $[a, a']$, entraînent que $x = a$ ou $x = a'$.

Donc l'ensemble des points où f admet un minimum relatif est l'ensemble des nombres binaires $p2^{-n}$. C'est un ensemble dénombrable, dense sur la droite.

Maximum.

On a $f(x) = \sum_0^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x)$. Or $f_1(4^k x)$ est maximum, et égal à 1, si et seulement si $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ (pour au moins un développement de x sous la forme (2)).

Donc l'ensemble des points où f atteint son maximum, égal à $4/3$, est l'ensemble des x , de la forme (2), satisfaisant $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ pour $k = 0, 1, \dots$. C'est un ensemble parfait totalement discontinu, de mesure nulle.

Maxima relatifs.

On a

$$f(x) = f_{2^{n-1}}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x). \quad (4)$$

Pour que x soit un point où f admet un maximum relatif, il suffit donc que $f_{2^{n-1}}$ soit constant au voisinage de x , et que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geq n$; la première condition équivaut à $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$, la seconde, comme on l'a vu, à $x_{2^{k+1}} + x_{2^{k+2}} = 1$ ($k \geq n$).

Inversement, soit x un point où f admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$. Sinon, en effet, $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$ garde un signe constant pour n assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe $+$; soit I_n le segment rectiligne du graphe de f_{n-1} qui se projette sur l'axe des x suivant le segment $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ contenant x ; pour n assez grand, I_{n+1} est à gauche de I_n , donc I_{n+j} est à gauche de I_n ($j \geq 1$), donc le point $(x, f(x))$ est à gauche de I_n ; comme I_n est une corde du graphe de f , $f(x)$ n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un n tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$, et tel que, sur l'intervalle contenant x où $f_{2^{n-1}}$ est constant, $f(x)$ soit le maximum de f . D'après (4), il s'ensuit que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geq n$.

Ainsi, l'ensemble des points où f admet un maximum relatif est l'ensemble des x , de la forme (2), satisfaisant les égalités $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k} = k$ pour k assez grand. C'est un F_σ , dense sur la droite, de mesure nulle.

2. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ SATISFAIT $\omega(h) \leq \chi(h)$, χ ÉTANT UNE FONCTION DONNÉE.

Si $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \chi(h) < \infty$, l'inégalité $\omega(h) \leq \chi(h)$ entraîne que la fonction est lipschitzienne ²⁾, donc admet une dérivée presque

²⁾ En vertu de l'inégalité $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$, valable pour tout $\delta > 0$ et tout entier naturel n .