

QUELQUES TENDANCES ACTUELLES EN ANALYSE NUMÉRIQUE

Autor(en): **Blanc, Charles**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-35493>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

QUELQUES TENDANCES ACTUELLES EN ANALYSE NUMÉRIQUE ¹⁾

par Charles BLANC, Lausanne

(Recu le 8 février 1960)

Il n'est pas exagéré de dire que ces dix ou quinze dernières années ont vu un domaine des mathématiques prendre un développement d'une rapidité et d'une ampleur encore inconnues dans notre science: la mise en œuvre des calculatrices électroniques a exigé des mathématiciens la mise au point de méthodes de calcul nouvelles, alors qu'elle révélait les défauts de certaines méthodes anciennes et qu'elle donnait aux chercheurs un moyen de se débarrasser de tout le côté fastidieux du calcul numérique. Il y a quinze ans à peine, peu nombreux étaient encore les mathématiciens se préoccupant systématiquement d'analyse numérique; leur existence même était quasiment ignorée: il a fallu attendre le Congrès d'Edimbourg, en 1958, pour qu'une place leur soit réservée dans les grandes réunions internationales. Très rares étaient ceux qui s'y consacraient dès l'abord: on y venait après avoir travaillé en théorie des nombres, en topologie ou dans quelque autre domaine; aujourd'hui, de nombreux jeunes gens, dès la fin de leurs études, viennent à l'analyse numérique, qui leur offre un grand choix de recherches qu'ils peuvent souvent poursuivre dans des conditions favorables comme membres d'un Centre de calcul.

A l'époque préélectronique, le problème central de l'analyse numérique était la construction de tables de fonctions. C'est ainsi que s'explique le titre, maintenant un peu suranné, du plus ancien périodique spécialisé dans ce domaine: *Mathematical Tables and other Aids to Computation*, créé en 1943 ²⁾; à cette époque, il n'existait pas plus de quatre ou cinq ouvrages valables

¹⁾ Conférence présentée le 12 septembre 1959, à la réunion de la Société Mathématique Suisse.

²⁾ La direction de cette revue vient au reste d'annoncer une modification du titre.

consacrés aux techniques de calcul; seuls quelques précurseurs avaient réussi à créer des centres spécialisés qui, dans les années qui suivirent, se multiplièrent un peu dans tous les pays; en même temps, des ouvrages toujours plus nombreux se publiaient, qui du reste étaient le plus souvent déjà singulièrement vieillis, à peine l'encre séchée; il y a aujourd'hui une bonne demi-douzaine de périodiques spécialisés en analyse numérique, privilège que ne connaît, je pense, aucun autre domaine des mathématiques.

Cette activité prodigieuse, dans un domaine resté si longtemps à l'écart de la recherche active, et cela juste au moment où les besoins et les moyens matériels prennent un tel développement, ne reste pas sans résultats. Je voudrais, en me limitant forcément, vous indiquer quelques-unes des tendances qui s'affirment, quelques connexions parfois surprenantes qui s'établissent, quelques-unes enfin des recherches de science pure que suscitent les besoins des applications concrètes.

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME ALGÈBRIQUE LINÉAIRE.

Le problème est presque trivial du point de vue des mathématiques « pures »: si le déterminant de la matrice des coefficients est non nul, il y a une solution et une seule; un traité d'algèbre linéaire ajoutera volontiers que cette solution peut s'obtenir par des quotients de déterminants.

Si on y regarde de plus près, la question cesse d'être aussi simple. Il faut $n!$ multiplications pour calculer d'après la définition la valeur d'un déterminant d'ordre n ; si par exemple $n = 30$, on a $n! \approx 2 \cdot 10^{32}$; une calculatrice électronique moyenne effectue une multiplication en, disons, 1 milliseconde (c'est un ordre de grandeur); un déterminant d'ordre 30, calculé selon la définition, exigerait ainsi $2 \cdot 10^{29}$ sec., soit $6 \cdot 10^{21}$ années! Or la même machine, en utilisant une méthode adéquate, résoudra le système considéré en quelques minutes seulement.

C'est Gauss qui a le premier établi (à propos des équations normales de la géodésie) une méthode acceptable de résolution par élimination des systèmes linéaires algébriques. On a depuis lors imaginé quantité de perfectionnements, plus ou moins heureux,

et aussi étudié des méthodes de caractère itératif, dont on a montré l'intérêt dans la résolution de systèmes de forme particulière. Ce qui se révèle intéressant et fécond, c'est la somme des expériences acquises par la mise en œuvre de ces méthodes sur les calculatrices électroniques. Je reviendrai sur cet aspect nécessairement expérimental de la recherche dans notre domaine.

À côté de l'élément durée, un autre problème se pose ici: par suite de l'emploi de fractions décimales limitées, les résultats sont entachés d'erreurs, *les erreurs d'arrondi*, qui peuvent leur ôter toute signification; le choix de la méthode utilisée joue naturellement un rôle; on constate néanmoins que les systèmes à résoudre peuvent être à ce point de vue plus ou moins bien *conditionnés*, d'où l'intérêt qu'il y a à savoir juger du plus ou moins bon conditionnement d'un système, plus précisément de la matrice de ses coefficients, et à le repérer par un nombre, dit *nombre de condition* de la matrice. La première idée qui est venue fut de considérer le déterminant de la matrice A du système comme un tel repère; on peut toutefois lui objecter qu'il ne se conserve pas si on multiplie tous les termes par un même nombre. On a proposé les quantités

$$T(A) = \frac{1}{n} \text{norme } A \cdot \text{norme } A^{-1} \quad (\text{Turing})$$

où

$$\text{norme } A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$$

et

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\mu(A)} \quad (\text{von Neumann et Goldstine})$$

où $\lambda(A)$ est la plus grande valeur propre de A et $\mu(A)$ la plus petite (en module).

Diverses expériences et des recherches théoriques ont montré que ces deux quantités donnent une assez bonne idée du conditionnement d'un système, celui-ci étant d'autant plus favorable que le nombre de condition est plus petit. On a montré (Todd) que $P(A)$ est *en moyenne* égal à n (ceci suppose une métrique sur l'ensemble des matrices, métrique à choisir d'une façon raisonnable).

Par contre, si on considère la matrice obtenue en remplaçant par des différences finies un opérateur différentiel du second ordre, on a

$$P(A) = 0 (n^2) ;$$

si l'opérateur est du quatrième ordre,

$$P(A) = 0 (n^4) ;$$

pour la matrice finie de Hilbert, on trouve même

$$P(A) = 0 (e^{\alpha n}), \quad \text{où} \quad \alpha > 0 .$$

Ces résultats permettent de guider notre choix lorsque l'on désire remplacer par des équations algébriques linéaires un problème de caractère différentiel.

On a montré également que la matrice obtenue en multipliant une matrice réelle A par sa transposée A' est moins bien conditionnée que A elle-même.

VALEURS PROPRES DE MATRICES.

La recherche des valeurs (et vecteurs) propres d'une matrice est en soi un problème important, outre l'intérêt que ces valeurs propres (ou du moins les extrêmes) présentent, comme on vient de le voir, pour l'étude du conditionnement d'un système. A côté de cette recherche elle-même, il est très utile de posséder des moyens de décider par exemple combien de valeurs propres sont contenues dans un domaine donné.

En ce qui concerne la détermination même des valeurs propres, je voudrais montrer, en décrivant sommairement une méthode de calcul, combien il faut être circonspect dès que l'on veut se lancer dans un calcul effectif. Le théorème de Hamilton-Cayley permet d'affirmer que si l'équation caractéristique est

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

la matrice satisfait à cette équation:

$$f(A) \equiv A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_n I = 0 ;$$

prenons alors un vecteur y ; en le multipliant à gauche par $f(A)$, on obtient

$$A^n y + c_1 A^{n-1} y + \dots + c_n y = 0,$$

c'est-à-dire un système de n équations, d'où on pourra tirer, si tout va bien, les coefficients c_i , ensuite de quoi il suffira de résoudre l'équation caractéristique. Ce beau programme peut toutefois réserver des surprises désagréables. Il faut tout d'abord que y ne soit pas un des vecteurs propres, ni trop voisin de l'un d'eux; on sait de plus que les vecteurs $A^k y$ (convenablement normés) tendent vers un vecteur propre; on a donc tout lieu de penser que le système linéaire considéré sera mal conditionné; il ne pourra nous livrer les c_i qu'avec une précision assez limitée.

Ici se pose donc la question: « Dans quelle mesure les racines d'une équation algébrique dépendent-elles des coefficients de l'équation ? » On sait que cette dépendance est continue, mais se fait-on toujours une idée même vague des ordres de grandeur ? Wilkinson a donné l'exemple suivant, qui est saisissant: l'équation

$$(x + 1)(x + 2) \dots (x + 20) = 0$$

a évidemment les racines

$$-1, -2, \dots, -20;$$

elle peut s'écrire

$$x^{20} + 210 x^{19} + \dots = 0;$$

or si on remplace le coefficient de x^{19} par

$$210 + 2^{-23},$$

certaines des racines de l'équation ne sont plus réelles; on trouve par exemple

$$-13,99 \pm 2,52 i;$$

ceci donne une idée des risques que l'on court si on prétend déterminer les valeurs propres en passant par l'équation caractéristique; à l'heure actuelle, les opinions sont encore très partagées sur la marche à suivre; pour les matrices non symétriques, il semble bien que l'on ne possède aujourd'hui aucune méthode vraiment satisfaisante.

THÉORIE DE L'APPROXIMATION.

Toute l'analyse numérique est dominée par l'idée d'approximation, dès l'instant où on accepte l'inévitable exigence du calcul: celui-ci comporte, en effet, toujours une *discrétisation* du problème proposé. D'une part, on remplace des opérateurs de l'analyse (avec passages à la limite) par des opérateurs finis, d'autre part on remplace les fractions décimales illimitées par des fractions limitées; laissons pour l'instant de côté les approximations dues à l'emploi d'un nombre limité de chiffres pour la représentation des nombres (*les erreurs d'arrondi*) pour nous limiter aux erreurs que l'on peut appeler *erreurs de méthode*.

On peut alors, pour préciser le problème de l'étude de ces erreurs, poser ceci: *une fonction étant bien définie par un certain nombre d'algorithmes relevant de l'analyse, former une expression n'utilisant que des algorithmes d'une classe restreinte et qui constitue une approximation, dans un sens à préciser, de la fonction donnée.*

Par exemple: une fonction satisfait à une équation différentielle, avec des conditions qui garantissent l'existence d'une seule solution, on demande de former une fonction rationnelle de degré maximum donné qui s'écarte le moins possible de cette solution.

En ce qui concerne les fonctions d'une seule variable, les études dans ce domaine sont bien avancées; elles ont montré l'importance des idées de Tchébycheff qui, avec Gauss, apparaît toujours plus comme un des grands précurseurs de l'analyse numérique moderne; pour des fonctions de plusieurs variables, on est aujourd'hui beaucoup moins avancé; c'est au reste un des domaines qui, pour l'instant, retient le plus l'attention des chercheurs, et il faut s'attendre à de grands progrès dans un proche avenir.

Comme on l'a vu, un problème d'approximation est toujours lié à une sorte de mesure de l'erreur. Dans de nombreux cas, une méthode d'approximation étant donnée, on recherche une *borne d'erreur*; cette borne est souvent donnée par des dérivées d'ordre plus ou moins élevé d'une fonction: par exemple le reste de Lagrange dans un développement taylorien donne une expres-

sion pour l'erreur commise en remplaçant une fonction par un polynôme obtenu d'une certaine manière. C'est dans cette voie que l'on obtient souvent le plus facilement des résultats formels, malheureusement d'un emploi ultérieur fréquemment malcommode. Par exemple, on ne possède à ma connaissance aucune expression de ce type, effectivement utilisable, pour exprimer l'erreur commise en remplaçant le laplacien par un opérateur aux différences dans le problème de Dirichlet.

On a pu, dans certains cas, donner des bornes d'erreur où interviennent des hypothèses un peu différentes sur les fonctions en jeu. Prenons par exemple les formules de quadrature approchée. En supposant que la fonction sous le signe somme est analytique dans une ellipse ayant ses foyers aux extrémités de l'intervalle d'intégration, on obtient des bornes d'erreur qui ne font intervenir que l'excentricité de cette ellipse et l'intégrale du module de la fonction sur son intérieur; ces bornes se révèlent beaucoup plus maniables et souvent plus fines que celles que fournit la considération de dérivées d'ordre plus ou moins élevé.

On peut également étudier ces erreurs d'un point de vue probabiliste: partant de la remarque qu'une étude d'erreurs considère en fait toujours un ensemble de données possibles, on peut rechercher non pas une *borne* mais une *moyenne*, ce qui suppose la définition d'une mesure dans l'ensemble des données considérées, mesure qui s'interprète naturellement dans un langage probabiliste.

L'étude du conditionnement (très défavorable) de la matrice de Hilbert montre combien sont dangereuses certaines méthodes de moments. Supposons que l'on désire dans $(0,1)$ une approximation optimum en moyenne quadratique d'une fonction $f(x)$ par un polynôme $P(x) = \sum a_k x^k$; en prenant le minimum de

$$\int_0^1 [f(x) - P(x)]^2 dx$$

on obtient pour les a_k un système algébrique linéaire dont la matrice a précisément le terme général

$$\frac{1}{i+k+1}$$

d'où l'on peut conclure (après Todd) qu'elle est très mal conditionnée; ceci explique les résultats souvent très peu favorables obtenus dans un tel cas.

LES ERREURS D'ARRONDI.

C'est dans l'étude de ces erreurs qu'il est peut-être le plus utile de combiner les recherches théoriques et les études expérimentales. Le nombre des circonstances qu'il est possible d'envisager a priori est si grand, la complexité des relations est telle, qu'il n'est pas raisonnable de se lancer dans des recherches sans avoir quelques idées sur ce qui peut se passer dans tel ou tel cas: en peu de temps (moins d'une heure souvent) une calculatrice électronique peut nous fournir, sur la base d'exemples bien choisis, une information qui évitera ensuite peut-être des semaines de recherches infructueuses; c'est précisément par des essais, faits non pas au hasard mais en tirant parti d'un certain empirisme, que l'on a eu la révélation de phénomènes d'instabilité dus aux erreurs d'arrondi, par exemple dans l'intégration numérique d'équations différentielles; on a pu faire ensuite une étude approfondie des causes de cette instabilité, étude qui a montré que de nombreuses méthodes qui semblaient acceptables sont inutilisables, dès que l'on ne se limite plus à quelques pas d'intégration.

On a vu plus haut combien les erreurs d'arrondi peuvent exercer une influence considérable sur la résolution d'une équation algébrique. Elles peuvent également rendre totalement illusoire certaines méthodes d'approximations successives.

ANALYSE NUMÉRIQUE ET THÉORIE DES JEUX.

Sous des aspects parfois fort différents, la théorie des jeux commence à fournir des moyens d'aborder efficacement des problèmes d'analyse numérique. En voici un exemple: considérons la résolution numérique d'une équation $f(x) = 0$; une méthode est théoriquement acceptable si elle fournit un moyen de former une suite d'intervalles emboîtés, de longueur tendant vers zéro et contenant une racine de l'équation; pour cela il faudra faire

une suite de calculs, selon une règle prescrite, cette règle (une « stratégie ») pouvant du reste comporter, en cours de calcul, des choix entre deux possibilités (des « tactiques ») selon des résultats intermédiaires; dès lors, la recherche d'une stratégie optimum consiste à rechercher celle qui, au sens de la théorie des jeux, donnera le meilleur résultat pour une quantité de travail donnée. On peut, par exemple, poser ceci (voir GROSS et JOHNSON, *MTAC*, 13, 1959, pp. 44 et suiv.): on sait que $f(x)$ est continue et convexe dans (a, b) , positive pour $x = a$, négative pour $x = b$; déterminer la stratégie optimum pour localiser la racine comprise entre $x = a$ et $x = b$, sachant que l'on aura le droit de calculer $f(x)$ pour n valeurs de x , ces valeurs étant à choisir au fur et à mesure des calculs; la théorie des jeux conduit alors au choix d'une stratégie qui est la meilleure possible dans l'hypothèse que l'« adversaire » (celui qui a choisi $f(x)$) (a lui-même basé son choix de façon à nous placer dans des conditions aussi défavorables que possible.

CONCLUSIONS.

Un problème d'analyse numérique peut faire appel aux théories mathématiques les plus diverses. Reprenons, par exemple, le problème de l'approximation.

En termes généraux, il se présente comme relevant de l'*analyse fonctionnelle*, le plus souvent dans des espaces de Banach; des théorèmes comme celui du point fixe ont permis de préciser la signification de certaines méthodes.

La recherche d'une approximation au sens de Tchébicheff revient à rendre minimum le maximum d'une certaine expression: déterminer les a_i de façon que

$$\max | f(x) - g(x, a_1, \dots, a_n) | = \min;$$

il s'agit donc d'un problème dit de *minimax*, fondamental en théorie des jeux; or cette théorie fait un emploi systématique de la théorie des *inégalités linéaires*, liée elle-même à celle des *corps convexes*.

La *géométrie algébrique* peut également jouer un rôle dans la théorie de l'approximation; considérons la recherche, au moyen

d'une fonction algébrique d'un type donné, d'une approximation d'une fonction donnée sur un ensemble fini A de R_n ; selon les propriétés de cet ensemble A relativement à l'ensemble de fonctions de la forme donnée, le problème peut dégénérer; la géométrie algébrique permet d'examiner, l'ensemble A étant donné, quels seront les choix favorables pour la forme de fonctions à adopter.

Ces quelques indications montrent assez, je pense, combien il est nécessaire, pour celui qui désire poursuivre des recherches en analyse numérique, ou tout au moins suivre celles qui se font, de posséder une information aussi solide que possible dans les domaines les plus variés des mathématiques. Cette information ne suffira pas, toutefois, s'il n'est pas pourvu d'un certain sens du concret, plus précisément d'une aptitude à voir les multiples aspects d'un même problème. L'analyse numérique lui procurera, par contre, les satisfactions que donne une science qui réunit dans un ensemble cohérent les spéculations abstraites et leurs applications, la libération du formalisme parfois stérile des théories synthétiques et l'exercice des facultés inventives.