

# RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME ALGÈBRIQUE LINEAIRE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

consacrés aux techniques de calcul; seuls quelques précurseurs avaient réussi à créer des centres spécialisés qui, dans les années qui suivirent, se multiplièrent un peu dans tous les pays; en même temps, des ouvrages toujours plus nombreux se publiaient, qui du reste étaient le plus souvent déjà singulièrement vieillis, à peine l'encre séchée; il y a aujourd'hui une bonne demi-douzaine de périodiques spécialisés en analyse numérique, privilège que ne connaît, je pense, aucun autre domaine des mathématiques.

Cette activité prodigieuse, dans un domaine resté si longtemps à l'écart de la recherche active, et cela juste au moment où les besoins et les moyens matériels prennent un tel développement, ne reste pas sans résultats. Je voudrais, en me limitant forcément, vous indiquer quelques-unes des tendances qui s'affirment, quelques connexions parfois surprenantes qui s'établissent, quelques-unes enfin des recherches de science pure que suscitent les besoins des applications concrètes.

#### RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME ALGÈBRIQUE LINÉAIRE.

Le problème est presque trivial du point de vue des mathématiques « pures »: si le déterminant de la matrice des coefficients est non nul, il y a une solution et une seule; un traité d'algèbre linéaire ajoutera volontiers que cette solution peut s'obtenir par des quotients de déterminants.

Si on y regarde de plus près, la question cesse d'être aussi simple. Il faut  $n!$  multiplications pour calculer d'après la définition la valeur d'un déterminant d'ordre  $n$ ; si par exemple  $n = 30$ , on a  $n! \approx 2 \cdot 10^{32}$ ; une calculatrice électronique moyenne effectue une multiplication en, disons, 1 milliseconde (c'est un ordre de grandeur); un déterminant d'ordre 30, calculé selon la définition, exigerait ainsi  $2 \cdot 10^{29}$  sec., soit  $6 \cdot 10^{21}$  années! Or la même machine, en utilisant une méthode adéquate, résoudra le système considéré en quelques minutes seulement.

C'est Gauss qui a le premier établi (à propos des équations normales de la géodésie) une méthode acceptable de résolution par élimination des systèmes linéaires algébriques. On a depuis lors imaginé quantité de perfectionnements, plus ou moins heureux,

et aussi étudié des méthodes de caractère itératif, dont on a montré l'intérêt dans la résolution de systèmes de forme particulière. Ce qui se révèle intéressant et fécond, c'est la somme des expériences acquises par la mise en œuvre de ces méthodes sur les calculatrices électroniques. Je reviendrai sur cet aspect nécessairement expérimental de la recherche dans notre domaine.

À côté de l'élément durée, un autre problème se pose ici: par suite de l'emploi de fractions décimales limitées, les résultats sont entachés d'erreurs, *les erreurs d'arrondi*, qui peuvent leur ôter toute signification; le choix de la méthode utilisée joue naturellement un rôle; on constate néanmoins que les systèmes à résoudre peuvent être à ce point de vue plus ou moins bien *conditionnés*, d'où l'intérêt qu'il y a à savoir juger du plus ou moins bon conditionnement d'un système, plus précisément de la matrice de ses coefficients, et à le repérer par un nombre, dit *nombre de condition* de la matrice. La première idée qui est venue fut de considérer le déterminant de la matrice A du système comme un tel repère; on peut toutefois lui objecter qu'il ne se conserve pas si on multiplie tous les termes par un même nombre. On a proposé les quantités

$$T(A) = \frac{1}{n} \text{norme } A \cdot \text{norme } A^{-1} \quad (\text{Turing})$$

où

$$\text{norme } A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$$

et

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\mu(A)} \quad (\text{von Neumann et Goldstine})$$

où  $\lambda(A)$  est la plus grande valeur propre de A et  $\mu(A)$  la plus petite (en module).

Diverses expériences et des recherches théoriques ont montré que ces deux quantités donnent une assez bonne idée du conditionnement d'un système, celui-ci étant d'autant plus favorable que le nombre de condition est plus petit. On a montré (Todd) que  $P(A)$  est *en moyenne* égal à  $n$  (ceci suppose une métrique sur l'ensemble des matrices, métrique à choisir d'une façon raisonnable).

Par contre, si on considère la matrice obtenue en remplaçant par des différences finies un opérateur différentiel du second ordre, on a

$$P(A) = 0 (n^2) ;$$

si l'opérateur est du quatrième ordre,

$$P(A) = 0 (n^4) ;$$

pour la matrice finie de Hilbert, on trouve même

$$P(A) = 0 (e^{\alpha n}), \quad \text{où} \quad \alpha > 0 .$$

Ces résultats permettent de guider notre choix lorsque l'on désire remplacer par des équations algébriques linéaires un problème de caractère différentiel.

On a montré également que la matrice obtenue en multipliant une matrice réelle  $A$  par sa transposée  $A'$  est moins bien conditionnée que  $A$  elle-même.

#### VALEURS PROPRES DE MATRICES.

La recherche des valeurs (et vecteurs) propres d'une matrice est en soi un problème important, outre l'intérêt que ces valeurs propres (ou du moins les extrêmes) présentent, comme on vient de le voir, pour l'étude du conditionnement d'un système. A côté de cette recherche elle-même, il est très utile de posséder des moyens de décider par exemple combien de valeurs propres sont contenues dans un domaine donné.

En ce qui concerne la détermination même des valeurs propres, je voudrais montrer, en décrivant sommairement une méthode de calcul, combien il faut être circonspect dès que l'on veut se lancer dans un calcul effectif. Le théorème de Hamilton-Cayley permet d'affirmer que si l'équation caractéristique est

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

la matrice satisfait à cette équation:

$$f(A) \equiv A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_n I = 0 ;$$