Valeurs propres de matrices.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Par contre, si on considère la matrice obtenue en remplaçant par des différences finies un opérateur différentiel du second ordre, on a

$$P(A) = 0(n^2) ;$$

si l'opérateur est du quatrième ordre,

$$P(A) = 0(n^4) ;$$

pour la matrice finie de Hilbert, on trouve même

$$P(A) = 0(e^{\alpha n}), \quad \text{où} \quad \alpha > 0 .$$

Ces résultats permettent de guider notre choix lorsque l'on désire remplacer par des équations algébriques linéaires un problème de caractère différentiel.

On a montré également que la matrice obtenue en multipliant une matrice réelle A par sa transposée A′ est moins bien conditionnée que A elle-même.

Valeurs propres de matrices.

La recherche des valeurs (et vecteurs) propres d'une matrice est en soi un problème important, outre l'intérêt que ces valeurs propres (ou du moins les extrêmes) présentent, comme on vient de le voir, pour l'étude du conditionnement d'un système. A côté de cette recherche elle-même, il est très utile de posséder des moyens de décider par exemple combien de valeurs propres sont contenues dans un domaine donné.

En ce qui concerne la détermination même des valeurs propres, je voudrais montrer, en décrivant sommairement une méthode de calcul, combien il faut être circonspect dès que l'on veut se lancer dans un calcul effectif. Le théorème de Hamilton-Cayley permet d'affirmer que si l'équation caractéristique est

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

la matrice satisfait à cette équation:

$$f(A) \equiv A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_n I = 0 ;$$

prenons alors un vecteur y; en le multipliant à gauche par f (A), on obtient

$$A^n y + c_1 A^{n-1} y + \dots + c_n y = 0 ,$$

c'est-à-dire un système de n équations, d'où on pourra tirer, si tout va bien, les coefficients c_i, ensuite de quoi il suffira de résoudre l'équation caractéristique. Ce beau programme peut toutefois réserver des surprises désagréables. Il faut tout d'abord que y ne soit pas un des vecteurs propres, ni trop voisin de l'un d'eux; on sait de plus que les vecteurs $A^k y$ (convenablement normés) tendent vers un vecteur propre; on a donc tout lieu de penser que le système linéaire considéré sera mal conditionné; il ne pourra nous livrer les c_i qu'avec une précision assez limitée.

Ici se pose donc la question: « Dans quelle mesure les racines d'une équation algébrique dépendent-elles des coefficients de l'équation ? » On sait que cette dépendance est continue, mais se fait-on toujours une idée même vague des ordres de grandeur ? Wilkinson a donné l'exemple suivant, qui est saisissant: l'équation

$$(x + 1)(x + 2) \dots (x + 20) = 0$$

a évidemment les racines

$$-1, -2, \dots, -20 ;$$

elle peut s'écrire

$$x^{20} + 210\, x^{19} + \dots = 0 ;$$

or si on remplace le coefficient de x^{19} par

$$210 + 2^{-23} ,$$

certaines des racines de l'équation ne sont plus réelles; on trouve par exemple

$$-13,99 \pm 2{,}52\, i ;$$

ceci donne une idée des risques que l'on court si on prétend déterminer les valeurs propres en passant par l'équation caractéristique; à l'heure actuelle, les opinions sont encore très partagées sur la marche à suivre; pour les matrices non symétriques, il semble bien que l'on ne possède aujourd'hui aucune méthode vraiment satisfaisante.