# SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Autor(en): **Hersch, Joseph**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35495

# SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE[1]

par Joseph HERSCH, Institut Battelle, Genève

*(Reçu le 25 octobre 1959.)*

## 1. INTRODUCTION.

Je voudrais attirer votre attention sur quelques aspects de deux problèmes de physique mathématique: le *problème de Dirichlet* et celui de la *fréquence fondamentale d'une membrane vibrante.* Il s'agira surtout des principes extrémaux liés à ces problèmes.

### 1. 1. *Un problème de Dirichlet.*

Nous considérons la solution $\varphi(x, y)$ du problème aux limites (fig. 1):

$$\Delta\varphi = 0 \text{ dans } G; \quad \begin{matrix} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{matrix} ;$$

nous nous intéressons particulièrement à l'intégrale de Dirichlet

$$D(\varphi) = \iint_G \text{grad}^2 \varphi \, dxdy .$$

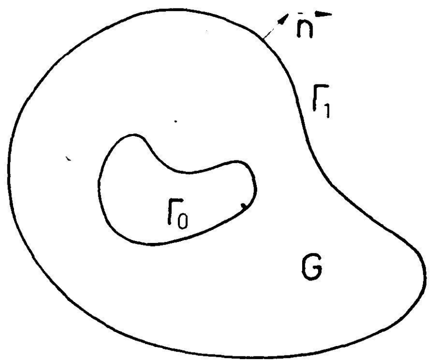

Fig. 1

Cette grandeur peut être évaluée dans les deux sens à l'aide des deux principes suivants:

*Principe de Dirichlet:*

Soit $v(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G, et telle que

$$\begin{matrix} v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ v = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{matrix} ;$$

alors $D(\varphi) \leqslant D(v)$ .

*Principe de Thomson:*

Soit $\vec{p}(x, y)$ un champ vectoriel dans G, sans sources: $\operatorname{div} \vec{p} = 0$; alors

$$D(\varphi) \geqslant \frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 \, dxdy} .$$

---

[1]) Leçon inaugurale à l'École polytechnique fédérale (Zurich), le 31 janvier 1959.

### 1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine G de contour $\Gamma$, nous cherchons un nombre positif $\lambda_1$ et une fonction $\varphi(x, y)$ deux fois continûment dérivable, tels que $\Delta\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$ et $\varphi > 0$ dans G, $\varphi = 0$ sur $\Gamma$.

$\sqrt{\lambda_1}$ est la fréquence fondamentale, $\varphi$ la première fonction propre.

*Principe de Rayleigh:*

Soit $v(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G, qui s'annule sur $\Gamma$; alors

$$\lambda_1 \leqslant R[v] = \frac{D(v)}{\iint\limits_G v^2\, dxdy} \cdot$$

*Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?*

$$\lambda_1 \geqslant ?$$

## 2. La conductibilité électrique d'une plaque homogène.

Considérons le domaine G (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique $\rho = 1$, bordée par deux électrodes $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$; appelons $\varphi(x, y)$ le potentiel au point $(x, y)$; on impose les potentiels 0 sur $\Gamma_0$ et 1 sur $\Gamma_1$ (différence de potentiel $V = 1$). Comme $\rho = 1$, on a la densité de courant $\vec{i} = \operatorname{grad} \varphi$; la conservation de la charge s'exprime par $0 = \operatorname{div} \vec{i} = \Delta\varphi$. On voit donc que *le potentiel $\varphi$ est la solution du problème de Dirichlet du* § 1. 1.

Comme $\rho = 1$ et $V = 1$, la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2\, dxdy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i} \cdot \vec{n}\, ds = I,$$

où I désigne l'intensité totale et $\vec{n}$ la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I} \cdot$$

## 3. Une interprétation du principe de Dirichlet.

3. 1. Modifions le problème physique du § 2 en introduisant dans le domaine G des conducteurs parfaits $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ (fig. 2). J'écrirai $\gamma_0 = \Gamma_0$, $\gamma_n = \Gamma_1$. Cette modification provoque évidemment une augmentation de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs $\gamma_i$, c'est-à-dire *si toutes les courbes* $\gamma_i$ *sont des lignes de niveau de* $\varphi$ (§ 2).

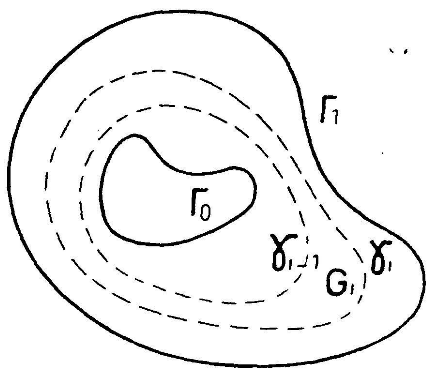


Fig. 2

Appelons $u(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, $\overline{I}$ l'intensité et $\overline{J}$ la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $u = \text{const} = u_i$ sur la courbe $\gamma_i$; dans chaque bande $G_i$ (entre $\gamma_{i-1}$ et $\gamma_i$), $u(x, y)$ s'obtient à partir de $u_{i-1}$ et $u_i$ en résolvant un problème de Dirichlet ($i = 1, 2, \ldots, n$); les inconnues $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont déterminées par les $n - 1$ conditions de conservation de la charge:

$$\text{Flux à travers } G_i = \text{Flux à travers } G_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On a encore $\overline{J} = V \cdot \overline{I} = \overline{I}$, donc

$$D(\varphi) = J = I \leqslant \overline{I} = \overline{J} = D(u).$$

Notre plaque se comporte à présent comme *un système de* n *résistances* $R_i = R_{\gamma_{i-1}\gamma_i}$ *connectées en série* (fig. 3):

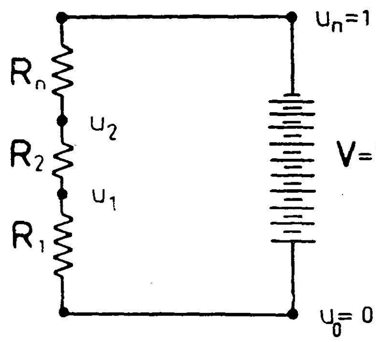


Fig 3

$$\frac{1}{\overline{I}} = \overline{R} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n .$$

3. 2. Modifions de nouveau le problème physique: Au lieu de laisser des potentiels « naturels » $u_i$ s'établir librement sur les

conducteurs $\gamma_i$, nous imposons des potentiels arbitraires $v_i$. En d'autres termes, nous connectons à la batterie toutes les extrémités des résistances partielles $R_i$ (fig. 4).

Appelons $v(x, y)$ la solution du nouveau problème physique (obtenue par résolution, dans chaque bande $G_i$, d'un problème de Dirichlet), et $\bar{\bar{J}}$ la chaleur de Joule maintenant dégagée par seconde.

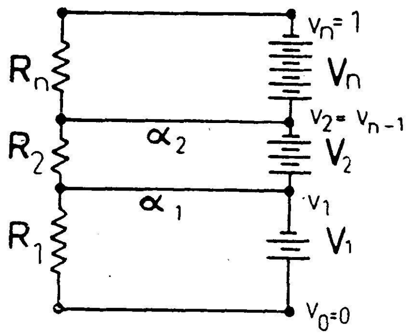

Fig. 4

Il est intuitif que $\bar{\bar{J}} \geqslant \bar{J}$; *quand a-t-on l'égalité ?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs ajoutés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire *si les potentiels intermédiaires imposés* $v_i$ *sont égaux aux potentiels « naturels »* $u_i$. La démonstration est simple et repose sur l'inégalité de Schwarz: posons

$$v_i - v_{i-1} = V_i\,; \quad \sum_1^n V_i = 1\,;$$

$$\bar{\bar{J}} = D(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{R_i} \geqslant \frac{(\Sigma V_i)^2}{\Sigma R_i} = \frac{1}{\bar{\bar{R}}} = D(u) = \bar{I} = \bar{J}\,;$$

on a l'égalité si $\dfrac{V_i}{R_i} =$ const, c'est-à-dire si l'intensité est la même dans chaque $G_i$: c'est précisément la condition qui, au § 3. 1, déterminait les $u_i$. On a donc

$$D(v) \geqslant D(u) \geqslant D(\varphi)\,.$$

3. 3. Le *principe de Dirichlet* exprime précisément l'inégalité $D(v) \geqslant D(\varphi)$ dans le cas limite où l'on a imposé *toutes* les lignes de niveau de $v$ et leur potentiel, c'est-à-dire lorsqu'on a imposé la fonction $v$ elle-même [1]). On n'a l'égalité que si $v = \varphi$.

---

[1]) A l'aide de toutes les lignes de niveau d'une fonction admissible $v$, on peut construire une borne supérieure $D(u)$ pour $D(\varphi)$, meilleure que $D(v)$: cf. G. Pólya et G. Szegö: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951), p. 47.

## 4. Une interprétation du principe de Thomson.

4. 1. Modifions *d'une autre façon* le problème physique initial (§ 2): *Découpons en lanières* $G_j$ *la plaque homogène* (fig. 5).

Ce découpage provoque évidemment une diminution de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée ?* Lorsque, initialement, aucun courant $\vec{i} = \operatorname{grad} \varphi$ ne traversait les coupures, c'est-à-dire *si toutes les coupures sont des lignes de flux de* grad $\varphi$ (§ 2).

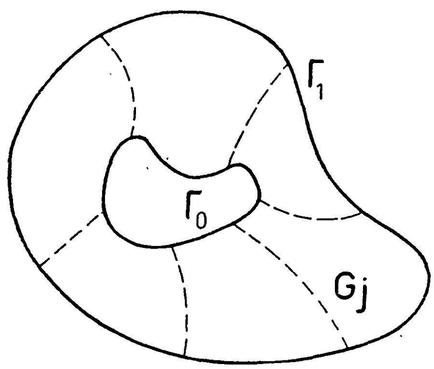

Fig. 5

Appelons $\varpi(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, $\tilde{\mathrm{I}}$ l'intensité totale et $\tilde{\mathrm{J}}$ la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $\varpi = 0$ sur $\Gamma_0$, $\varpi = 1$ sur $\Gamma_1$, $\frac{\partial \varpi}{\partial n} = 0$ sur les coupures, $\Delta \varpi = 0$ dans chaque $G_j$.

On a encore $\tilde{\mathrm{J}} = \mathrm{V} \cdot \tilde{\mathrm{I}} = \tilde{\mathrm{I}}$, donc $\mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{J} = \mathrm{I} \geqslant \tilde{\mathrm{I}} = \tilde{\mathrm{J}} = \mathrm{D}(\varpi)$.

Notre plaque se comporte à présent comme un *système de résistances* $R_1, R_2, \ldots, R_m$ *connectées en parallèle:*

$$\tilde{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\mathrm{I}}_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R_j} \qquad (\text{car } V = 1).$$

Appelons $\varpi_j$ la restriction de $\varpi$ à $G_j$;

$$\tilde{\mathrm{J}}_j = \mathrm{D}(\varpi_j) = \int_{\Gamma_{1j}} \frac{\partial \varpi_j}{\partial n}\, ds = \tilde{\mathrm{I}}_j,$$

où $\Gamma_{1j}$ est la partie de $\Gamma_1$ qui borde $G_j$.

4. 2. Considérons le cas limite où les lanières $G_j$ sont de largeur infinitésimale. Le découpage de G est alors équivalent à un *choix des lignes de flux* d'un champ vectoriel. Soit $\vec{p}$ un tel champ, *de divergence nulle*; la direction de $\vec{p}$ est déterminée en

tout point; sa grandeur $p = p(s)$ est fonction de l'arc sur la ligne de flux. L'équation div $\vec{p} = 0$ est donc équivalente à une équation différentielle *ordinaire*, linéaire et *homogène*, pour $p(s)$; une solution est grad $w$ (c'est-à-dire: grad $w_j$ dans la bande infinitésimale $G_j$); donc, dans $G_j$, $\vec{p} = t_j$ grad $w_j$ ($t_j$ est constante dans $G_j$). Il s'ensuit, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 \, dx dy} = \frac{\left[\sum_j t_j \mathrm{D}(w_j)\right]^2}{\sum_j t_j^2 \mathrm{D}(w_j)} \leqslant \sum_j \mathrm{D}(w_j) =$$

$$= \mathrm{D}(w) = \mathrm{I} \leqslant \mathrm{I} = \mathrm{J} = \mathrm{D}(\varphi),$$

nous avons donc bien une interprétation du principe de Thomson.

## 5. Un passage Thomson $\longrightarrow$ Dirichlet, à l'aide des lignes de niveau $\bar{\gamma}$ d'une fonction $v$ concurrente pour Dirichlet.

Dans le principe de Thomson ci-dessus, normons $\vec{p}$ en imposant $\oint_\gamma \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds = 1$ pour *toute* courbe fermée $\gamma$ séparant $\Gamma_0$ de $\Gamma_1$; pour *ces* champs concurrents $\vec{p}$, on a

$$\mathrm{D}(\varphi) = \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2 \, dx dy\right)^{-1} .$$

Admettons maintenant davantage de champs concurrents: imposons la condition $\oint_{\bar{\gamma}} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds = 1$ pour les seules lignes de niveau $\bar{\gamma}$ de $v$; le maximum devient plus grand, et nous avons

$$\mathrm{D}(\varphi) \leqslant \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2 \, dx dy\right)^{-1} ;$$

on peut montrer que le maximum à droite est maintenant égal à $\mathrm{D}(u)$ (cf. § 3. 1), donc $\mathrm{D}(\varphi) \leqslant \mathrm{D}(u) \leqslant \mathrm{D}(v)$, et nous retrouvons bien le principe de Dirichlet.

## 6. Un passage Dirichlet ⟶ Thomson, à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel $\vec{p}$ concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine G en lanières $G_j$ par des lignes de flux $\varkappa$ de $\vec{p}$, comme au § 4.1; dans le principe de Dirichlet (§ 1.1)

$$D(\varphi) = \mathrm{Min}_v D(v),\ v \text{ continue dans G, lisse par morceaux} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0\ , \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1\ , \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions $\tilde{v}$ discontinues le long des coupures $\varkappa$; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière $G_j$: le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v})\ .$$

Soit $\tilde{v}_j$ la restriction de $\tilde{v}$ à $G_j$, et soit de nouveau $w_j$ la solution du problème mixte dans $G_j$: $w_j = 0$ sur $\Gamma_{0j}$, $w_j = 1$ sur $\Gamma_{1j}$, $\dfrac{\partial w_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures $\varkappa$.

$$\mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}) = \sum_j \mathrm{Min}_{\tilde{v}_j} D(\tilde{v}_j) = \sum_j D(w_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n}\, ds = D(w),$$

comme au § 4. 1; pour des lanières $G_j$ de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4. 2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p}\,.\,\vec{n}\, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^{\,2}\, dx dy} \leqslant D(w)\ ,$$

donc $\leqslant D(\varphi)$ en vertu de ce qui précède.

## 7. Un pas vers un principe de Thomson pour la membrane vibrante.

7. 1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1. 2), un passage analogue à celui du § 6; à

présent: « *de Rayleigh à Thomson* ». Pour cela, partageons le domaine G du § 1.2 en sous-domaines $G_j$ (fig. 6).

Dans le principe de Rayleigh

$\lambda_1 = \mathrm{Min}_v \, R[v]$, $v$ continue dans G, lisse par morceaux, $= 0$ sur $\Gamma$,

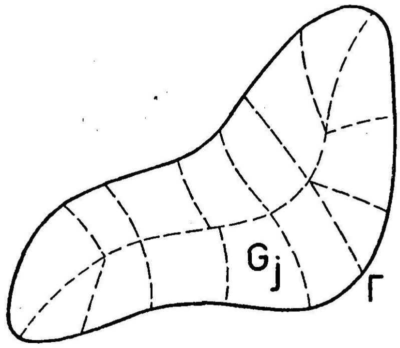


Fig. 6

nous voulons maintenant admettre également à concurrence les fonctions $\tilde{v}$ discontinues le long des coupures. Le minimum ne peut évidemment que décroître:

$$\lambda_1 \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} \, R[\tilde{v}] \, ;$$

appelons $\tilde{v}_j$ la restriction de $\tilde{v}$ à $G_j$.

Soient, dans $G_j$, $\xi_j$ la première valeur propre et $w_j$ la fonction propre correspondante, d'une membrane $G_j$ liée le long de $\Gamma_j$, libre sur les « coupures »; on a $\Delta w_j + \xi_j w_j = 0$ et $w_j > 0$ dans $G_j$, $w_j = 0$ sur $\Gamma_j$, $\frac{\partial w_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures; $\xi_j = \mathrm{Min}_{\tilde{v}_j} \, R[\tilde{v}_j]$. Donc

$$\lambda_1 \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} \, R[\tilde{v}] = \mathrm{Min}_{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m} \frac{\sum_j D(\tilde{v}_j)}{\sum_j \iint_{G_j} \tilde{v}_j^2 \, dx dy} = \min_j \xi_j \, .$$

*Si* toutes les coupures sont des lignes de flux de grad $\varphi$ ($\varphi$ étant la fonction propre fondamentale, cf. § 1.2), $w_j$ est simplement la restriction de $\varphi$ à $G_j$ et l'on a, pour tout $j$,

$$\xi_j = R[w_j] = \lambda_1$$

Nous pouvons donc énonçer le résultat suivant:

$$\lambda_1 = \mathrm{Max}_{\text{découpages de G en lanières } G_j} \min_j \xi_j \, . \qquad [1])$$

[1]) à Voir ce sujet: *C.R. Acad. Sci. Paris*, *248*, 1959, p. 2060, où deux applications numériques sont indiquées.

7. 2. Dans le cas limite de bandes $G_j$ de largeur infinitésimale, on a, dans chaque $G_j$, un problème à une seule variable indépendante, car $w_j = w_j(s)$.

Le parallélisme entre ce § 7 et le précédent permet d'interpréter ce résultat comme un pas en direction d'un « principe de Thomson » pour la membrane vibrante. La difficulté reste évidemment le calcul (ou l'évaluation par défaut) de tous les $\xi_j$. Peut-on aller au-delà de cette formulation ? La question reste ouverte.