4. Une interprétation du principe de Thomson.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

4. Une interprétation du principe de Thomson.

4.1. Modifions *d'une autre façon* le problème physique initial (§ 2): *Découpons en lanières* G_j *la plaque homogène* (fig. 5).

Ce découpage provoque évidemment une diminution de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée ?* Lorsque, initialement, aucun courant $\vec{i} = \text{grad}\ \varphi$ ne traversait les coupures, c'est-à-dire *si toutes les coupures sont des lignes de flux de* grad φ (§ 2).

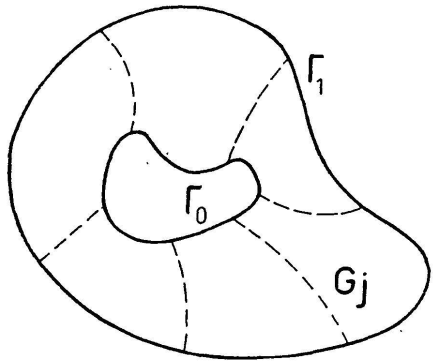

Fig. 5

Appelons $w(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, $\tilde{I}$ l'intensité totale et $\tilde{J}$ la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $w = 0$ sur Γ_0, $w = 1$ sur Γ_1, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ sur les coupures, $\Delta w = 0$ dans chaque G_j.

On a encore $\tilde{J} = V \cdot \tilde{I} = \tilde{I}$, donc $D(\varphi) = J = I \geqslant \tilde{I} = \tilde{J} = D(w)$.

Notre plaque se comporte à présent comme un *système de résistances* $R_1, R_2, \ldots, R_m$ *connectées en parallèle:*

$$\tilde{I} = \sum_{j=1}^{m} \tilde{I}_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R_j} \qquad (\text{car } V = 1).$$

Appelons w_j la restriction de w à G_j;

$$\tilde{J}_j = D(w_j) = \int_{\Gamma_{1j}} \frac{\partial w_j}{\partial n}\, ds = \tilde{I}_j,$$

où Γ_{1j} est la partie de Γ_1 qui borde G_j.

4.2. Considérons le cas limite où les lanières G_j sont de largeur infinitésimale. Le découpage de G est alors équivalent à un *choix des lignes de flux* d'un champ vectoriel. Soit $\vec{p}$ un tel champ, *de divergence nulle*; la direction de $\vec{p}$ est déterminée en tout point; sa grandeur $p = p(s)$ est fonction de l'arc sur la ligne de flux. L'équation div $\vec{p} = 0$ est donc équivalente à une équation différentielle *ordinaire*, linéaire et *homogène*, pour $p(s)$; une solution est grad w (c'est-à-dire: grad w_j dans la bande infinitésimale G_j); donc, dans G_j, $\vec{p} = t_j$ grad w_j (t_j est constante dans G_j). Il s'ensuit, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \,.\, \vec{n}\, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^2\, dxdy} = \frac{\left[\sum_j t_j \mathrm{D}(w_j)\right]^2}{\sum_j t_j^2 \mathrm{D}(w_j)} \leqslant \sum_j \mathrm{D}(w_j) =$$

$$= \mathrm{D}(w) = \mathrm{I} \leqslant \mathrm{I} = \mathrm{J} = \mathrm{D}(\varphi),$$

nous avons donc bien une interprétation du principe de Thomson.

5. Un passage Thomson $\longrightarrow$ Dirichlet, à l'aide des lignes de niveau $\bar{\gamma}$ d'une fonction v concurrente pour Dirichlet.

Dans le principe de Thomson ci-dessus, normons $\vec{p}$ en imposant $\oint_\gamma \vec{p} \,.\, \vec{n}\, ds = 1$ pour *toute* courbe fermée γ séparant Γ_0 de Γ_1; pour *ces* champs concurrents $\vec{p}$, on a

$$\mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2\, dxdy\right)^{-1} .$$

Admettons maintenant davantage de champs concurrents: imposons la condition $\oint_{\bar{\gamma}} \vec{p} \,.\, \vec{n}\, ds = 1$ pour les seules lignes de niveau $\bar{\gamma}$ de v; le maximum devient plus grand, et nous avons

$$\mathrm{D}(\varphi) \leqslant \mathrm{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2\, dxdy\right)^{-1} ;$$

on peut montrer que le maximum à droite est maintenant égal à $\mathrm{D}(u)$ (cf. § 3. 1), donc $\mathrm{D}(\varphi) \leqslant \mathrm{D}(u) \leqslant \mathrm{D}(v)$, et nous retrouvons bien le principe de Dirichlet.