

## 4. Une interprétation du principe de Thomson.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. UNE INTERPRÉTATION DU PRINCIPE DE THOMSON.

4.1. Modifions d'une autre façon le problème physique initial (§ 2): Découpons en lanières  $G_j$  la plaque homogène (fig. 5).

Ce découpage provoque évidemment une diminution de l'intensité. Quand l'intensité est-elle inchangée? Lorsque, initialement, aucun courant  $\vec{i} = \text{grad } \varphi$  ne traversait les coupures, c'est-à-dire si toutes les coupures sont des lignes de flux de  $\text{grad } \varphi$  (§ 2).

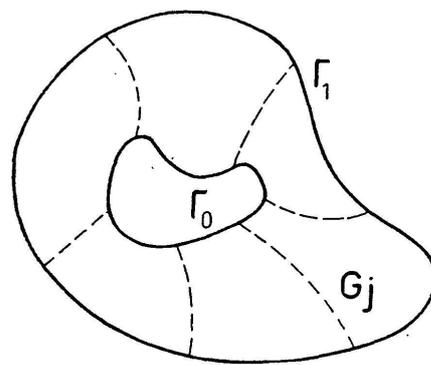


Fig. 5

Appelons  $\omega(x, y)$  le potentiel pour le problème modifié,

$\tilde{I}$  l'intensité totale et  $\tilde{J}$  la chaleur

de Joule dégagée par seconde. On a  $\omega = 0$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\omega = 1$  sur  $\Gamma_1$ ,

$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$  sur les coupures,  $\Delta \omega = 0$  dans chaque  $G_j$ .

On a encore  $\tilde{J} = V \cdot \tilde{I} = \tilde{I}$ , donc  $D(\varphi) = J = I \geq \tilde{I} = \tilde{J} = D(\omega)$ .

Notre plaque se comporte à présent comme un système de résistances  $R_1, R_2, \dots, R_m$  connectées en parallèle:

$$\tilde{I} = \sum_{j=1}^m \tilde{I}_j = \sum_{j=1}^m \frac{1}{R_j} \quad (\text{car } V = 1).$$

Appelons  $\omega_j$  la restriction de  $\omega$  à  $G_j$ ;

$$\tilde{J}_j = D(\omega_j) = \int_{\Gamma_{1j}} \frac{\partial \omega_j}{\partial n} ds = \tilde{I}_j,$$

où  $\Gamma_{1j}$  est la partie de  $\Gamma_1$  qui borde  $G_j$ .

4.2. Considérons le cas limite où les lanières  $G_j$  sont de largeur infinitésimale. Le découpage de  $G$  est alors équivalent à un choix des lignes de flux d'un champ vectoriel. Soit  $\vec{p}$  un tel champ, de divergence nulle; la direction de  $\vec{p}$  est déterminée en

tout point; sa grandeur  $p = p(s)$  est fonction de l'arc sur la ligne de flux. L'équation  $\operatorname{div} \vec{p} = 0$  est donc équivalente à une équation différentielle *ordinaire*, linéaire et *homogène*, pour  $p(s)$ ; une solution est  $\operatorname{grad} \omega$  (c'est-à-dire:  $\operatorname{grad} \omega_j$  dans la bande infinitésimale  $G_j$ ); donc, dans  $G_j$ ,  $\vec{p} = t_j \operatorname{grad} \omega_j$  ( $t_j$  est constante dans  $G_j$ ). Il s'ensuit, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\frac{\left( \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 dx dy} = \frac{\left[ \sum_j t_j D(\omega_j) \right]^2}{\sum_j t_j^2 D(\omega_j)} \leq \sum_j D(\omega_j) =$$

$$= D(\omega) = I \leq I = J = D(\varphi),$$

nous avons donc bien une interprétation du principe de Thomson.

5. UN PASSAGE THOMSON  $\longrightarrow$  DIRICHLET,  
à l'aide des lignes de niveau  $\bar{\gamma}$  d'une fonction  $\nu$   
concurrente pour Dirichlet.

Dans le principe de Thomson ci-dessus, normons  $\vec{p}$  en imposant  $\oint_{\gamma} \vec{p} \cdot \vec{n} ds = 1$  pour toute courbe fermée  $\gamma$  séparant  $\Gamma_0$  de  $\Gamma_1$ ; pour ces champs concurrents  $\vec{p}$ , on a

$$D(\varphi) = \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left( \iint_G \vec{p}^2 dx dy \right)^{-1}.$$

Admettons maintenant davantage de champs concurrents: imposons la condition  $\oint_{\bar{\gamma}} \vec{p} \cdot \vec{n} ds = 1$  pour les seuls lignes de niveau  $\bar{\gamma}$  de  $\nu$ ; le maximum devient plus grand, et nous avons

$$D(\varphi) \leq \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left( \iint_G \vec{p}^2 dx dy \right)^{-1};$$

on peut montrer que le maximum à droite est maintenant égal à  $D(u)$  (cf. § 3. 1), donc  $D(\varphi) \leq D(u) \leq D(\nu)$ , et nous retrouvons bien le principe de Dirichlet.