ZUR DEFINITION DES KRÜMMUNGSRADIUS KONVEXER KURVEN

von Helmut GROEMER in Corvallis, Ore., U.S.A.

(Reçu le 5 janvier 1961)

Es liege eine ebene konvexe Kurve, das heisst der Rand C eines konvexen Bereiches C^0 vor. Ist P ein Punkt von C, so gibt es mehrere Möglichkeiten den Krümmungsradius von C im Punkte P zu erklären. Eine der bekanntesten Definitionen ist die folgende (siehe dazu B. JESSEN [1]).

Definition 1: Ausser dem festen Punkt P werde auf C noch ein Punkt X gewählt. $R(P, X)$ bezeichne den Radius eines Kreises, der durch P und X geht und C in P berührt, das heisst C und der Kreis haben in P eine gemeinsame Stützgerade. Existiert der Grenzwert

$$R = \lim_{X \to P} R(P, X) \,, \tag{1}$$

so heisse R der Krümmungsradius von C im Punkte P. (Falls C im Punkte P mehrere Stützgeraden hat, ist $R(P, X)$ nicht eindeutig definiert. Dies ist jedoch ohne Bedeutung, da sich bei jeder Wahl $R = 0$ ergibt.)

Die Werte $R = 0$ und $R = \infty$ seien stets zulässig. Im folgenden soll in zwei verschiedenen Formulierungen auf eine weitere einfache Möglichkeit, R zu definieren, hingewiesen werden. Es wird sich herausstellen, dass das durch die neue Definition gelieferte R mit (1) übereinstimmt. Ist P ein Punkt von C und K ein durch P gehender Kreis, so soll zunächst folgende Ausdrucksweise eingeführt werden: K heisse bei P innerhalb C liegend, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so dass $K \cap U \subset C^0$ ist. K heisse bei P ausserhalb C liegend, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so dass $K \cap U$ mit $C^0 - C$ keine Punkte gemeinsam hat. Die entarteten Kreise vom Radius 0 oder ∞ sollen nirgends ausgeschlossen sein.

Nun kann die folgende axiomatische Definition des Krümmungsradius gegeben werden.

Definition 2: Ein Zahl R heisse der Krümmungsradius von C im Punkte P, wenn es zu jedem R' mit $R' < R$ einen Kreis vom Radius R' gibt, der bei P innerhalb C liegt, und zu jedem R'' mit $R'' > R$ einen Kreis vom Radius R'' gibt, der bei P ausserhalb C liegt.

Eine konstruktive Fassung der Definition 2 ist die

Definition 3: Es sei $\overline{R}$ die untere Grenze der Radien aller Kreise, die bei P ausserhalb C liegen, und $\underline{R}$ die obere Grenze der Radien aller Kreise die bei P innerhalb C liegen. Gilt

$$\overline{R} = \underline{R}\ , \tag{2}$$

so heisse dieser Wert der Krümmungsradius R von C im Punkte P.

Ist $\overline{R} \neq \underline{R}$, so könnte man $\overline{R}$ den äusseren und $\underline{R}$ den inneren Krümmungsradius von K nennen. $\overline{R}$ und $\underline{R}$ haben viele Eigenschaften, die R hat und existieren immer. Die Definitionen 2 und 3 kann man auch so formulieren, dass sie für beliebige orientierte ebene Kurven einen Sinn haben. Man braucht nur die Begriffe „bei P innerhalb C“ und „bei P ausserhalb C“ in naheliegender Weise durch „bei P links von C“ und „bei P rechts von C“ ersetzen.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Definitionen 1, 2, 3 untereinander äquivalent sind.

Äquivalenz der Definitionen 1 und 3: Wie schon bemerkt, kann man voraussetzen, dass es in P genau eine Stützgerade von C gibt. Angenommen (2) sei richtig. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es dann zwei durch P gehende Kreise $\overline{K}_\varepsilon$, $\underline{K}_\varepsilon$ mit den Radien $R + \varepsilon$, $R - \varepsilon$, derart dass für eine gewisse Umgebung U von P der Teilbogen $C_\varepsilon = C \cap U$ von C zwischen $\overline{K}$ und $\underline{K}$ liegt. (R bedeutet natürlich das durch (2) gegebene R.) Ist X ein beliebiger Punkt aus C_ε, so muss daher der Kreis, der durch P und X geht und C im Punkte P berührt, zwischen $\overline{K}$ und $\underline{K}$ liegen. Somit gilt für hinreichend nahe bei P liegendes X

$$R - \varepsilon \leqq R(P, X) \leqq R + \varepsilon\ .$$

Das bedeutet aber, dass (1) existiert und dass die durch Definition 1 und 3 gegebenen R in diesem Fall übereinstimmen.

Nun werde angenommen, dass (1) existiere. Es sei K der Kreis mit dem durch (1) gegebenen Radius R, der C in P berührt. Es soll zunächst gezeigt werden: Berührt ein Kreis $\overline{K}$ vom Radius $R + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) C im Punkte P, so liegt $\overline{K}$ bei P ausserhalb C. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Folge von Punkten P_i ($i = 1, 2, \ldots$) mit $P_i \in C$, $\lim\limits_{i \to \infty} P_i = P$ und P_i ausserhalb $\overline{K}$. Für die Radien R (P, P_i) gälte daher

$$R = \lim_{X \to P} R(P, X) \geqq \varliminf_{i \to \infty} R(P, P_i) \geqq R + \varepsilon ,$$

was unmöglich ist. Genau so sieht man, dass die analog definierten Kreise K_ε vom Radius $R - \varepsilon$ bei P innerhalb C liegen. Zusammen mit der trivialen Ungleichung $\underline{R} \leqq \overline{R}$ erhält man demnach für jedes positive ε

$$R - \varepsilon \leqq \underline{R} \leqq \overline{R} \leqq R + \varepsilon ,$$

also $R = \underline{R} = \overline{R}$.

Äquivalenz der Definitionen 2 und 3: Dass das durch (2) oder (1) gegebene R die in Definition 2 genannte Eigenschaft hat, wurde soeben beim Beiweis, dass (2) aus (1) folgt, dargelegt. Liegt umgekehrt ein durch Definition 2 erklärtes R vor, so ist offenbar sowohl $R < \overline{R}$ wie auch $R > \underline{R}$ unmöglich. Also gilt

$$\overline{R} \leqq R \leqq \underline{R} ,$$

woraus wegen $\underline{R} \leqq \overline{R}$ folgt, dass $R = \overline{R} = \underline{R}$ ist.

LITERATUR

[1.] B. Jessen, Om konvekse Kurvers Krumning. *Mat. Tidsskr. B.*, 50-62 (1929).