

# LE PLUS PETIT COUVERCLE CIRCULAIRE DE n POINTS

Autor(en): **Ehrhart, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-36335>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LE PLUS PETIT COUVERCLE CIRCULAIRE DE $n$ POINTS

par E. EHRHART

(Recu le 20 mars 1960)

Un ensemble  $E$  de  $n$  points étant donné dans le plan, nous nous proposons de construire leur plus petit couvercle circulaire, c'est-à-dire le plus petit cercle tel qu'aucun de ces points ne lui soit extérieur. Il est bien possible que ce problème ait déjà été posé et résolu. En donnant notre solution, nous voulons simplement attirer l'attention sur cette question, qui ne demande que des connaissances très élémentaires et nous paraît susceptible d'intéresser l'élève et de développer chez lui l'esprit méthodique.

A priori il semble qu'on sera conduit à choisir entre un nombre fini, mais éventuellement grand, de cercles. Il s'agit donc, d'une part, d'éliminer rapidement le plus grand nombre possible de cercles et, d'autre part, de trouver un critère permettant de reconnaître si un cercle, solution présumée, convient. La construction du cercle cherché (C) sera une conséquence immédiate de quelques observations :

## LEMES

1. On sait qu'il existe un polygone convexe bien déterminé qui a pour sommets des points de  $E$  et tel qu'aucun des points de  $E$  ne lui soit extérieur. *On peut supprimer tous les points autres que l'ensemble  $E'$  des sommets du polygone, car si un cercle couvre  $E'$ , il couvre nécessairement  $E$ .*

2. Appelons cordes les côtés et les diagonales du polygone. *Si les angles construits sur la plus grande corde  $C$  et ayant pour sommets les autres points de  $E'$  sont tous obtus ou droits, (C) est le*

cercle de diamètre  $c$ , car il couvre tous les points de  $E'$ , et tout cercle couvrant  $c$  a un diamètre au moins égal à  $c$ .

3. Si le cercle de diamètre  $c$  ne convient pas,  $(C)$  est circonscrit à un triangle acutangle ayant pour sommets trois points de  $E'$ .

Considérons un cercle couvrant  $E'$  sans passer par un de ses points, et soit  $r$  la plus grande distance d'un point de  $E'$  au centre. Le cercle concentrique de rayon  $r$  est donc un couvercle plus petit. Si ce cercle  $(O)$  passe par un seul point  $A$  de  $E'$ , une homothétie de centre  $A$  et de rapport convenable transformera  $(O)$  en un cercle  $(O_1)$  couvrant  $E'$  et passant par deux points  $A, B$  de cet ensemble. Si ce sont les seuls points de  $E'$  situés sur  $(O_1)$ , considérons un point  $C$  de  $E'$ , tel que l'angle  $ACB$  soit minimum. Cet angle étant aigu (sans quoi on retomberait sur le cas 2 exclu), le cercle  $(O_2)$  circonscrit à  $ABC$  est un couvercle plus petit que  $(O_1)$ . Si  $(O_1)$  passe par  $A, B$  et un troisième point  $C$  de  $E'$ ,  $(O_1)$  jouera dans la suite le rôle de  $(O_2)$ .

Le triangle  $ABC$  ne peut avoir un angle droit, car le côté opposé serait le diamètre de  $(C)$  et l'on retomberait encore sur le cas 2. S'il a un angle obtus en  $A$  ou  $B$ , soit  $\hat{A}$  pour fixer les idées, deux cas sont à envisager:

a)  $(O_2)$  passe par un quatrième point  $C'$ , situé nécessairement sur l'arc  $\widehat{ACB}$ . Le centre  $O_2$  ne peut se trouver sur un côté ou une diagonale du quadrilatère convexe qui a les quatre points pour sommets, car ce segment serait un diamètre et l'on retrouverait le cas 2. Si  $O_2$  est intérieur au quadrilatère, il est intérieur à l'un des triangles qu'on peut former avec trois sommets du quadrilatère, et ce triangle est donc acutangle. Si  $O_2$  est extérieur au quadrilatère, son côté le plus voisin de  $O$  est  $OC$  ou  $OC'$ , soit  $OC$  pour fixer les idées. Considérons le point  $D$  de  $E'$  tel que  $\widehat{BDC}$  soit minimum. Nécessairement la droite  $BC'$  passe entre le côté  $AC$  et le sommet  $D$  de cet angle aigu. Le cercle  $(O_3)$  circonscrit à  $BCD$  sera donc un couvercle plus petit que  $(O_2)$ ;

b) Si  $(O_2)$  ne porte aucun point de  $E'$  autre que  $A, B, C$  et que  $\hat{A}$ , par exemple, est obtus, on considère le point  $D$  de  $E'$  tel que

$\widehat{BDC}$  soit minimum (il est aigu et la droite BC passe entre A et D). Le cercle  $(O_3)$  circonscrit à BCD est un couvercle plus petit que  $(O_2)$ .

En continuant l'opération avec le triangle BCD, etc., on arrive nécessairement à un triangle acutangle dont les sommets appartiennent à  $E'$ , puisque le nombre de cercles passant par trois points de  $E'$  est limité et que les rayons des cercles successivement rencontrés vont en diminuant.

4. *Un couvercle circulaire de  $E'$ , circonscrit à un triangle acutangle ABC dont les sommets appartiennent à  $E'$ , est nécessairement le plus petit.* Il résulte en effet de ce qui précède que le plus petit couvercle des trois points A, B, C est le cercle ABC.

5. Soit ABC un triangle acutangle inscrit dans (C) et dont les sommets appartiennent à  $E'$ . Les points A, B, C partagent le contour du polygone convexe (P) construit sur  $E'$  en trois lignes brisées (AB), (BC), (CA) dont seules les extrémités appartiennent à l'ensemble des trois points A, B, C. Considérons un sommet M de (P) situé sur (AB) pour fixer les idées. Si l'angle en M de (P) était aigu, l'angle AMB le serait également, ce qui est impossible puisque le quadrilatère convexe ACBM est intérieur à (C). Donc *tout sommet d'angle aigu de (P) est un sommet du triangle acutangle inscrit dans (C).*

### CONSTRUCTION

Je trace le polygone (P) enveloppe convexe des  $n$  points donnés. J'envisage, au besoin je construis, le cercle qui a pour diamètre le plus grand des segments de l'ensemble des côtés et des diagonales. S'il ne coupe pas (P), il est la solution (C).

Sinon, je considère les angles aigus de (P). (Il y en a trois au plus, car la somme des angles extérieurs de (P) valant  $2\pi$ , il ne peut y avoir quatre angles extérieurs obtus.)

S'il en a trois, le cercle passant par leurs sommets est (C).

S'il en a deux de sommets A, B, je considère le sommet C tel que  $\widehat{ACB}$  soit minimum. Le cercle ABC est (C).

Si j'aperçois un triangle acutangle dont les sommets font partie de l'ensemble  $E'$  des sommets de  $(P)$ , et dont le cercle circonscrit ne coupe  $(P)$ , ce cercle est  $(C)$ .

Sinon je choisis un triangle obtusangle  $ABC$  satisfaisant à ces conditions. (Si  $(P)$  a un angle aigu, je prends  $A$  en son sommet.) Si  $C$  est le sommet de l'angle obtus du triangle, je le

remplace par  $C'$ , sommet de  $(P)$  tel que  $\widehat{AC'B}$  soit minimum. Si  $\widehat{AC'B}$  est acutangle, son cercle circonscrit est  $(C)$ .

Si le cercle circonscrit au triangle obtusangle  $AC'B$  ne porte pas d'autres points de  $E'$ , je remplace comme précédemment le sommet de l'angle obtus par le point  $D$  de  $E'$ , qui voit le côté opposé sous le plus petit angle; etc.

Si le cercle circonscrit au triangle obtusangle  $AC'B$  porte d'autres points  $C''$ ,  $C'''$  ... de  $E'$ , et que son centre  $O$  est intérieur à l'enveloppe convexe  $(P')$  des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$ , ... ce cercle est  $(C)$ . Si  $O$  est extérieur à  $(P')$  et que  $MN$  est le côté de  $(P')$  le plus voisin de  $O$ , on passe au triangle  $MND$ ,  $D$  étant

le point de  $E'$  tel que  $\widehat{MDN}$  soit minimum, etc.

Après un certain nombre de ces substitutions de sommets, j'arrive à un triangle acutangle. Son cercle circonscrit est  $(C)$ .

E. EHRHART,  
13a, boulevard de Lyon,  
Strasbourg.