# 1,4. Moindres carrés.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

1, 4. *Moindres carrés.*

A partir de la relation

$$\mathbf{E}\boldsymbol{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H ,$$

le théorème de Gauss-Markov conduit à introduire le vecteur-estimateur $\overset{*}{\boldsymbol{\mathfrak{b}}}$ défini en fonction de l'observation $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ par la condition que

$$S^2(\mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{b})^T (\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{b})$$

soit minimum pour $\mathfrak{b} = \overset{*}{\mathfrak{b}}$. Or, comme

$$\frac{d}{d b_{i,H}}\,\mathfrak{b}_H = \mathfrak{e}_{i,H} , \quad \frac{d}{d b_{i,H}}\,\mathfrak{b}_H^T = \mathfrak{e}_{i,H}^T ,$$

et

$$S^2(\mathfrak{b}) = \mathfrak{x}^\star \mathfrak{x} - \mathfrak{b}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} - \mathfrak{x}^\star \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H + \mathfrak{b}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H ,$$

on a

$$\frac{d\,S^2(\mathfrak{b})}{d b_{i,H}} = 2\,(\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H - \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}) .$$

Les conditions $\dfrac{d\,S^2(\overset{*}{\mathfrak{b}})}{d b_{i,H}} = 0$ conduisent donc au système

$$\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\,\overset{*}{\boldsymbol{\mathfrak{b}}}_H = \mathfrak{A}^T \boldsymbol{\mathfrak{x}} ,$$

identique au système normal. Il en résulte que, si $r = p$, les estimateurs de moindres carrés ne sont autres que les estimateurs privilégiés. Si $r < p$, les deux méthodes conduisent aux mêmes combinaisons estimables fondamentales.

## 2. Distributions et épreuves d'hypothèses.

### 2, 1. *Sommes des carrés.*

2, 11. Soit $\mathsf{U}^\star$ un sous-espace vectoriel de $\mathsf{V}^\star$; on appelle « somme de carrés due à $\mathsf{U}^\star$ », et on note $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star$ [11]), le carré scalaire de la projection orthogonale de $\boldsymbol{\mathfrak{x}}$ sur le dual $\mathsf{U}$ de $\mathsf{U}^\star$. La dimension de $\mathsf{U}^\star$ est, par définition, le « nombre de degrés de liberté » de $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star$.