

2, 1. Sommes des carrés.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1, 4. *Moindres carrés.*

A partir de la relation

$$\mathbf{E} \mathbf{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{b}_H ,$$

le théorème de Gauss-Markov conduit à introduire le vecteur-estimateur \mathfrak{b}^* défini en fonction de l'observation \mathbf{x} par la condition que

$$S^2(\mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{x} - \mathfrak{A} \mathfrak{b})^T (\mathfrak{x} - \mathfrak{A} \mathfrak{b})$$

soit minimum pour $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^*$. Or, comme

$$\frac{d}{db_{i,H}} \mathfrak{b}_H = \mathbf{e}_{i,H} , \quad \frac{d}{db_{i,H}} \mathfrak{b}_H^T = \mathbf{e}_{i,H}^T ,$$

et

$$S^2(\mathfrak{b}) = \mathfrak{x}^* \mathfrak{x} - \mathfrak{b}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} - \mathfrak{x}^* \mathfrak{A} \mathfrak{b}_H + \mathfrak{b}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \mathfrak{b}_H ,$$

on a

$$\frac{d S^2(\mathfrak{b})}{d b_{i,H}} = 2 (\mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \mathfrak{b}_H - \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}) .$$

Les conditions $\frac{d S^2(\mathfrak{b}^*)}{d b_{i,H}} = 0$ conduisent donc au système

$$\mathfrak{A}^T \mathfrak{A} \mathfrak{b}_H^* = \mathfrak{A}^T \mathbf{x} ,$$

identique au système normal. Il en résulte que, si $r = p$, les estimateurs de moindres carrés ne sont autres que les estimateurs privilégiés. Si $r < p$, les deux méthodes conduisent aux mêmes combinaisons estimables fondamentales.

2. DISTRIBUTIONS ET ÉPREUVES D'HYPOTHÈSES.

2, 1. *Sommes des carrés.*

2, 11. Soit \mathbf{U}^* un sous-espace vectoriel de \mathbf{V}^* ; on appelle « somme de carrés due à \mathbf{U}^* », et on note \mathbf{SCU}^* ¹¹⁾, le carré scalaire de la projection orthogonale de \mathbf{x} sur le dual \mathbf{U} de \mathbf{U}^* . La dimension de \mathbf{U}^* est, par définition, le « nombre de degrés de liberté » de \mathbf{SCU}^* .

Si les vecteurs v_1^*, \dots, v_t^* ($t \geq s$) engendrent U^* , on écrit, d'ordinaire, $\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$ pour U^* ; on écrira donc aussi $SC\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$ pour $SC U^*$.

2, 12. Pour calculer effectivement $SC U^*$, on introduit une base quelconque de U^* , soit u_1^*, \dots, u_s^* . La projection orthogonale ε_u de ε sur U est alors définie par les relations

$$\varepsilon_u = \sum \lambda_i u_i, \quad \langle \varepsilon - \varepsilon_u, u_k \rangle \equiv u_k^* (\varepsilon - \varepsilon_u) = 0 \quad (k = 1, \dots, s)$$

d'où l'on tire

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i u_i^* u_k = u_k^* \varepsilon \quad (k = 1, \dots, s), \quad (7)$$

ystème d'équations linéaires qui détermine entièrement les λ_i (en effet, les u_i formant une base de U , la matrice $\|u_i^* u_k\|$ est de rang s). On a alors

$$\begin{aligned} SC U^* &= \varepsilon_u^* \varepsilon_u = \left(\sum_1^s \lambda_i u_i^* \right) \left(\sum_1^s \lambda_k u_k \right) \\ &= \sum_1^s \sum_1^s \lambda_i \lambda_k u_i^* u_k \end{aligned}$$

moyennant (7), ce qui entraîne

$$SC U^* = \sum_1^s \lambda_k u_k^* \varepsilon. \quad (8)$$

Dans le cas où $s = 1$ (U^* engendré par l'unique vecteur u^*), on a

$$SC\{u^*\} = (u^* \varepsilon)^2 / (u^* u). \quad (9)$$

2, 13. Soient U_1^* et U_2^* deux sous-espaces complémentaires de U^* , mutuellement orthogonaux, U_1 et U_2 leurs duals; ceux-ci sont, dans U , deux sous-espaces complémentaires mutuellement orthogonaux, et on a

$$\varepsilon_u^* \varepsilon_u = \varepsilon_{u_1}^* \varepsilon_{u_1} + \varepsilon_{u_2}^* \varepsilon_{u_2},$$

ce qui entraîne

$$SC U^* = SC U_1^* + SC U_2^*. \quad (10)$$

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux composantes, et on peut énoncer que

si \mathbf{U}^* est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux $\mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_t^*$, on a

$$\text{SC } \mathbf{U}^* = \sum_1^t \text{SC } \mathbf{U}_i^* .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base u_1^*, \dots, u_s^* de \mathbf{U}^* ; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale w_1^*, \dots, w_s^* ; alors on a

$$\text{SC } \mathbf{U}^* = \sum_1^s \text{SC} \{ w_i^* \}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\text{SC } \mathbf{U}^* = \sum_1^s (w_i^* \cdot \mathbf{x})^2 / (w_i^* \cdot w_i^*) . \quad (11)$$

2, 14. On écrit, en particulier,

SCT (somme de carrés totale) pour **SC** \mathbf{V}^* ,
SCN (somme de carrés normale) pour **SC** \mathbf{V}_+ ,
SCE (somme de carrés des erreurs) pour **SC** \mathbf{V}_0 .

On notera que, \mathbf{V}_+ et \mathbf{V}_0 étant par définition complémentaires et orthogonaux dans \mathbf{V}^* , on a toujours

$$\text{SCT} = \text{SCN} + \text{SCE} .$$

D'autre part, e_1^*, \dots, e_n^* forment une base orthogonale de \mathbf{U}^* , et $e_i^* \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}_i$; donc

$$\text{SCT} = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 .$$

2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.

2, 21. Soit \mathbf{U}^* un sous-espace de \mathbf{V}^* , de dimension s , w_1^*, \dots, w_s^* une base orthogonale de \mathbf{U}^* . Chaque $w_i^* \cdot \mathbf{x}$ est une variable