2, 1. Sommes des carrés.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

1, 4. *Moindres carrés.*

A partir de la relation

$$\mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H ,$$

le théorème de Gauss-Markov conduit à introduire le vecteur-estimateur $\overset{*}{\mathfrak{b}}$ défini en fonction de l'observation $\mathfrak{x}$ par la condition que

$$\mathrm{S}^2(\mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{b})^T (\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{b})$$

soit minimum pour $\mathfrak{b} = \overset{*}{\mathfrak{b}}$. Or, comme

$$\frac{d}{d\,b_{i,H}}\,\mathfrak{b}_H = \mathfrak{e}_{i,H} , \quad \frac{d}{d\,b_{i,H}}\,\mathfrak{b}_H^T = \mathfrak{e}_{i,H}^T ,$$

et

$$\mathrm{S}^2(\mathfrak{b}) = \mathfrak{x}^\star\,\mathfrak{x} - \mathfrak{b}_H^T\,\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^\star\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H + \mathfrak{b}_H^T\,\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H ,$$

on a

$$\frac{d\,\mathrm{S}^2(\mathfrak{b})}{d\,b_{i,H}} = 2\,(\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H - \mathfrak{A}^T\,\mathfrak{x}) .$$

Les conditions $\dfrac{d\,\mathrm{S}^2(\overset{*}{\mathfrak{b}})}{d\,b_{i,H}} = 0$ conduisent donc au système

$$\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\overset{*}{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T\,\mathfrak{x} ,$$

identique au système normal. Il en résulte que, si $r = p$, les estimateurs de moindres carrés ne sont autres que les estimateurs privilégiés. Si $r < p$, les deux méthodes conduisent aux mêmes combinaisons estimables fondamentales.

2. Distributions et épreuves d'hypothèses.

2, 1. *Sommes des carrés.*

2, 11. Soit $\mathsf{U}^\star$ un sous-espace vectoriel de $\mathsf{V}^\star$; on appelle « somme de carrés due à $\mathsf{U}^\star$ », et on note $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star$ [11]), le carré scalaire de la projection orthogonale de $\mathfrak{x}$ sur le dual U de $\mathsf{U}^\star$. La dimension de $\mathsf{U}^\star$ est, par définition, le « nombre de degrés de liberté » de $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star$.

Si les vecteurs $\mathfrak{v}_1^\star, \ldots \mathfrak{v}_t^\star$ $(t \geqslant s)$ engendrent $\mathsf{U}^\star$, on écrit, d'ordinaire, $\{\mathfrak{v}_1^\star, \ldots, \mathfrak{v}_t^\star\}$ pour $\mathsf{U}^\star$; on écrira donc aussi $\mathbf{SC}\{\mathfrak{v}_1^\star, \ldots, \mathfrak{v}_t^\star\}$ pour $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star$.

2, 12. Pour calculer effectivement $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star$, on introduit une base quelconque de $\mathsf{U}^\star$, soit $\mathfrak{u}_1^\star, \ldots, \mathfrak{u}_s^\star$. La projection orthogonale $\mathfrak{x}_u$ de $\mathfrak{x}$ sur U est alors définie par les relations

$$\mathfrak{x}_u = \sum \lambda_i \mathfrak{u}_i \quad , \quad < \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_u \, , \, \mathfrak{u}_k > \; \equiv \mathfrak{u}_k^\star (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_u) = 0 \quad (k = 1, \ldots, s)$$

d'où l'on tire

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathfrak{u}_i^\star \mathfrak{u}_k = \mathfrak{u}_k^\star \mathfrak{x} \; (k = 1, \ldots, s) \; , \tag{7}$$

système d'équations linéaires qui détermine entièrement les λ_i (en effet, les $\mathfrak{u}_i$ formant une base de U, la matrice $\| \mathfrak{u}_i^\star \mathfrak{u}_k \|$ est de rang s). On a alors

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \mathfrak{x}_u^\star \mathfrak{x}_u = \left(\sum_1^s \lambda_i \mathfrak{u}_i^\star\right)\left(\sum_1^s \lambda_k \mathfrak{u}_k\right)$$

$$= \sum_1^s \sum_1^s \lambda_i \lambda_k \mathfrak{u}_i^\star \mathfrak{u}_k$$

moyennant (7), ce qui entraîne

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \sum_1^s \lambda_k \mathfrak{u}_k^\star \mathfrak{x} \; . \tag{8}$$

Dans le cas où $s = 1$ ($\mathsf{U}^\star$ engendré par l'unique vecteur $\mathfrak{u}^\star$), on a

$$\mathbf{SC}\{\mathfrak{u}^\star\} = (\mathfrak{u}^\star \mathfrak{x})^2 / (\mathfrak{u}^\star \mathfrak{u}) \; . \tag{9}$$

2, 13. Soient $\mathsf{U}_1^\star$ et $\mathsf{U}_2^\star$ deux sous-espaces complémentaires de $\mathsf{U}^\star$, mutuellement orthogonaux, U_1 et U_2 leurs duals; ceux-ci sont, dans U, deux sous-espaces complémentaires mutuellement orthogonaux, et on a

$$\mathfrak{x}_u^\star \mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_{u_1}^\star \mathfrak{x}_{u_1} + \mathfrak{x}_{u_2}^\star \mathfrak{x}_{u_2} \; ,$$

ce qui entraîne

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \mathbf{SC}\,\mathsf{U}_1^\star + \mathbf{SC}\,\mathsf{U}_2^\star \; . \tag{10}$$

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux compo santes, et on peut énoncer que

si $\mathsf{U}^\star$ *est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux* $\mathsf{U}_1^\star, \ldots, \mathsf{U}_t^\star$, *on a*

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \sum_1^t \mathbf{SC}\,\mathsf{U}_i^\star .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base $\mathfrak{u}_1^\star, \ldots, \mathfrak{u}_s^\star$ de $\mathsf{U}^\star$; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale $\mathfrak{w}_1^\star, \ldots, \mathfrak{w}_s^\star$; alors on a

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \sum_1^s \mathbf{SC}\{\,\mathfrak{w}_i^\star\,\}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^\star = \sum_1^s (\mathfrak{w}_i^\star\,\mathfrak{x})^2 / (\mathfrak{w}_i^\star\,\mathfrak{w}_i) . \qquad (11)$$

2, 14. On écrit, en particulier,

SCT (somme de carrés totale) pour $\mathbf{SC}\,\mathsf{V}^\star$,
SCN (somme de carrés normale) pour $\mathbf{SC}\,\mathsf{V}_+$,
SCE (somme de carrés des erreurs) pour $\mathbf{SC}\,\mathsf{V}_0$.

On notera que, V_+ et V_0 étant par définition complémentaires et orthogonaux dans $\mathsf{V}^\star$, on a toujours

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{SCN} + \mathbf{SCE} .$$

D'autre part, $\mathfrak{e}_1^\star, \ldots, \mathfrak{e}_n^\star$ forment une base orthogonale de $\mathsf{U}^\star$, et $\mathfrak{e}_i^\star\,\mathfrak{x} = \mathbf{x}_i$; donc

$$\mathbf{SCT} = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 .$$

2, 2. *Distributions. Epreuves d'hypothèses.*

2, 21. Soit $\mathsf{U}^\star$ un sous-espace de $\mathsf{V}^\star$, de dimension s, $\mathfrak{w}_1^\star, \ldots, \mathfrak{w}_s^\star$ une base orthogonale de $\mathsf{U}^\star$. Chaque $\mathfrak{w}_i^\star\,\mathfrak{x}$ est une variable