

2. Eléments conjugués.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'ensemble $\mathbf{R}(\theta)$, formé de ce groupe et de l'élément nul, est un **corps**, au sens général de ce terme (ce qui justifie le nom de *corps quadratique*). L'ensemble des éléments rationnels r , de $\mathbf{R}(\theta)$, en est un **sous-corps, isomorphe** —ou, par abréviation, égal— *au corps* \mathbf{R} , des nombres rationnels (inversement $\mathbf{R}(\theta)$ est **sur corps** de \mathbf{R}).

La construction de l'addition, de la soustraction et de la multiplication et les qualités de ces opérations resteraient valables, même sans l'hypothèse d'irréductibilité de $F(x)$; les inverses n'existeraient alors que pour certains des éléments $r+s\theta$ (ceux pour lesquels $r:s$ n'annule pas $F(x)$). L'ensemble construit serait seulement un **anneau**, commutatif avec une unité, —ou au sens restreint— .

On peut aussi considérer que $\mathbf{R}(\theta)$ est un *sous-corps* du corps des nombres: *réels* si D est positif; *complexes* si D est négatif. Cette conception fournit encore une justification des règles de calcul, y compris la division. Elle sera utilisée ci-dessous pour établir la détermination des cycles d'idéaux semi-réduits, dans un corps réel (46 et 47).

2. Éléments conjugués.

DÉFINITION. — Dans le corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, *deux éléments sont appelés conjugués*, ou chacun d'eux est le conjugué de l'autre, *lorsqu'ils sont égaux*, respectivement, à des formes de $1, \theta$ et de $1, \theta'$, avec les mêmes multiplicateurs (nombres rationnels). Ils sont désignés par la même lettre, avec et sans accent (comme θ et θ' , qui sont des éléments conjugués particuliers):

$$\rho = r+s\theta = (r+Ss)-s\theta' \Leftrightarrow \rho' = r+s\theta' = (r-Ss)-s\theta.$$

Un élément du corps est *égal à son conjugué*, si et seulement si c'est un *élément rationnel* (coefficient de θ nul). Pour le vérifier, il suffit de former la différence de deux conjugués:

$$0 = \rho - \rho' = s \times (\theta - \theta') = -Ss + 2s\theta = Ss - 2s\theta' \Leftrightarrow s = 0.$$

Les éléments θ et θ' sont conjugués et inégaux.

Deux éléments de $\mathbf{R}(\theta)$, obtenus en remplaçant x par θ et θ' ,

dans un même polynôme $f(x)$, à coefficients rationnels, sont conjugués :

$$f(\theta) = r + s\theta = \rho \quad \Leftrightarrow \quad f(\theta') = r + s\theta' = \rho'.$$

Car les éléments θ et θ' , annulant chacun le polynôme fondamental (dans $\mathbf{R}(\theta)$), les valeurs qu'ils donnent à $f(x)$, sont respectivement égales à celles qu'ils donnent au binôme du premier degré :

$$r + sx = f(x) - F(x) \times q(x),$$

reste de la division de $f(x)$ par $F(x)$.

En particulier les éléments conjugués d'une somme, d'un produit (ou, plus généralement, d'une expression entière, à coefficients rationnels), d'éléments de $\mathbf{R}(\theta)$, sont égaux à la somme, au produit (ou à l'expression entière) des éléments respectivement conjugués.

PROPRIÉTÉ, caractéristique de la conjugaison. — *Pour que deux éléments, d'un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, soient conjugués, il faut et il suffit que leur somme et leur produit soient des éléments rationnels* — ou égaux à leurs conjugués — .

Il est équivalent de dire que les deux éléments sont simultanément zéros d'un même polynôme, du second degré, normé, à coefficients rationnels.

La condition est *nécessaire* : $\rho + \rho'$ et $\rho \times \rho'$ sont respectivement égaux à leurs conjugués, en raison de la commutativité de la somme et du produit ; ils sont donc rationnels. D'ailleurs :

$$(r + s\theta) + (r + s\theta') = 2r + Ss; \quad (r + s\theta) \times (r + s\theta') = r^2 - Srs + Ns^2.$$

Les deux éléments conjugués sont zéros du trinôme normé :

$$\mathbf{r}(x) = (x - \rho) \times (x - \rho') = x^2 - (2r + Ss)x + (r^2 - Ss + Ns^2).$$

La condition est *suffisante* : en raison des propriétés de la division des polynômes, un trinôme normé du second degré $\mathbf{r}(x)$, à coefficients rationnels, considéré dans le corps $\mathbf{R}(\theta)$, ne peut avoir plus de deux zéros. Or les valeurs :

$$\mathbf{r}(r + s\theta) = \mathbf{r}(\rho) \quad \mathbf{r}(r + s\theta') = \mathbf{r}(\rho'),$$

sont conjuguées, quel que soit le trinôme $\mathbf{r}(x)$, à coefficients rationnels.

Elles ne peuvent être nulles que simultanément; si $r(x)$ a un zéro, il en a un deuxième qui est le conjugué du premier.

Si deux éléments ρ, ρ' ont pour somme et pour produit des éléments rationnels: $S(\rho) = S(\rho')$ et $N(\rho) = N(\rho')$, ils sont les deux zéros du trinôme normé

$$r(x) = x^2 - S(\rho)x + N(\rho) = (x - \rho) \times (x - \rho');$$

donc sont conjugués.

DÉFINITIONS. — Dans un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, pour un couple d'éléments conjugués, ρ et ρ' , —ou pour chacun d'eux—, on appelle:

Trace: la somme $\rho + \rho'$, désignée par $S(\rho)$, ou $S(\rho')$;

Norme: le produit $\rho \times \rho'$, désigné par $N(\rho)$, ou $N(\rho')$;

Polynôme fondamental: le trinôme normé, qui a pour zéros ρ et ρ' :

$$r(x) = (x - \rho) \times (x - \rho') = x^2 - S(\rho)x + N(\rho);$$

Discriminant: le carré de leur différence, qui est encore un élément rationnel:

$$(\rho - \rho')^2 = [S(\rho)]^2 - 4N(\rho) = s^2 \times D; \quad \text{désigné par } D(\rho).$$

Pour deux éléments conjugués, exprimés avec le générateur θ , ou θ' :

$$\rho = r + s\theta = r' + s'\theta'; \quad \rho' = r + s\theta' = r' + s'\theta;$$

la trace et la norme sont égales indifféremment à:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= S(\rho') = 2r + Ss = 2r' + Ss'; \\ N(\rho) &= N(\rho') = r^2 + Srs + Ns^2 = r'^2 + Sr's' + Ns'^2. \end{aligned}$$

On peut encore exprimer la norme en utilisant la décomposition de $4F(x)$:

$$4N(\rho) = 4N(\rho') = (2r + Ss)^2 - Ds^2 = (2r' + Ss')^2 - Ds'^2.$$

Pour le couple d'éléments θ et θ' , ces expressions deviennent:

$$S(\theta) = S(\theta') = S; \quad N(\theta) = N(\theta') = N; \quad D(\theta) = D(\theta') = D.$$

Pour un élément rationnel r , ce sont:

$$S(r) = 2r; \quad N(r) = r^2; \quad D(r) = 0.$$

De ces définitions il résulte que: l'inverse ρ^{-1} , d'un élément ρ , non nul, est égal au produit de son conjugué par l'inverse de sa norme:

$$\rho^{-1} = \rho' \times [N(\rho)]^{-1}, \quad \rho'^{-1} = \rho \times [N(\rho)]^{-1}$$

La transformation —ou l'autotransformation— qui, dans un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, fait correspondre —ou substitue— à tout élément ρ son conjugué ρ' , est *biunivoque* et *involutive* (le conjugué du conjugué est égal à l'élément lui-même). Elle conserve les éléments rationnels —ou laisse invariant le sous-corps \mathbf{R} — elle conserve les opérations (addition et multiplication, ainsi que leurs inverses soustraction et division): le conjugué (du résultat) d'une expression rationnelle à coefficients rationnels, d'éléments du corps est égal à (le résultat) de l'expression rationnelle, avec les mêmes coefficients, des conjugués respectifs des éléments de l'expression primitive.

Dans le langage de l'algèbre moderne, la conjugaison est un **automorphisme** du corps $\mathbf{R}(\theta)$, considéré comme une *extension* du corps \mathbf{R} , ou comme une *adjonction* à ce corps \mathbf{R} , d'un zéro de $F(x)$.

3. Domaine des entiers (algébriques) d'un corps quadratique.

Par anticipation de la définition générale des bases d'un idéal (9), on appellera **bases canoniques conjuguées**, d'un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta')$, les deux couples conjugués d'éléments, éventuellement disposés en colonnes:

$$1 \ \theta, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ \theta \end{vmatrix}; \quad 1 \ \theta', \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ \theta' \end{vmatrix};$$

qui ont permis d'engendrer les couples d'éléments conjugués du corps par des formes, qui peuvent être écrites en produits matriciels:

$$\rho = r + s\theta = \|rs\| \times \begin{vmatrix} 1 \\ \theta \end{vmatrix}; \quad \rho' = r + s\theta' = \|rs\| \times \begin{vmatrix} 1 \\ \theta' \end{vmatrix}$$

Les nombres rationnels r, s , multiplicateurs —ou variables—, de la forme qui définit un élément ρ , seront appelés les **coor-**