14. Division des idéaux fractionnaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Le cas général en résulte immédiatement, par application de la *commutativité* et de l'*associativité* de la multiplication:

$$\mathbf{I} = (q)\times(m,\ \theta-c), \qquad \mathbf{I}' = (q)\times(m,\ \theta'-c);$$
$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (q)\times(q)\times(m,\ \theta-c)\times(m,\ \theta'-c) = (q^2)\times(m) = (q^2m).$$

La seconde propriété se déduit immédiatement de la première:

$$\text{Norme de } \mathbf{I}\times\mathbf{J} = (\mathbf{I}\times\mathbf{J})\times(\mathbf{I}'\times\mathbf{J}') = (\mathbf{I}\times\mathbf{I}')\times(\mathbf{J}\times\mathbf{J}')$$
$$= [N(\mathbf{I})]\times[N(\mathbf{J})].$$

Le *carré d'un idéal double* **G** —égal à son conjugué, (**7**)— *est égal à l'idéal principal rationnel*, dont une base est la norme de **G**:

$$\mathbf{G} = q\times(g,\ \theta-c) = q\times(g,\ \theta'-c) = \mathbf{G}' \Rightarrow \mathbf{G}^2 = \mathbf{G}\times\mathbf{G}' = (q^2\times g).$$

Les cas particuliers indiqués pour la multiplication entraînent des cas particuliers et des conséquences du théorème des normes.

La *norme d'un idéal principal* (ρ) *est égale à la valeur absolue* $|N(\rho)|$, de la norme de ρ [égale pour les diverses bases possibles, (**11. 1**)], [ceci a déjà été établi par un raisonnement direct pour un idéal canonique, (**11. 3**)]

$$(\rho)\times(\rho') = (\text{norme de } \rho) \quad\Rightarrow\quad \text{norme de } (\rho) = |\text{norme de } \rho|.$$

En particulier la norme d'un *idéal principal rationnel* (q) est égale à q^2.

Un idéal entier **F** *contient sa norme*, puisque son idéal conjugué **F**$'$ étant aussi entier, chacun d'eux contient $\mathbf{F}\times\mathbf{F}'$.

Il n'y a qu'*un idéal entier, de norme* 1, qui est l'*idéal unité*. Car un tel idéal étant contenu dans (1) et contenant (1), lui est égal.

14. Division des idéaux fractionnaires.

Définition. — *Deux idéaux*, non nuls, *sont* **inverses** —ou chacun d'eux est l'inverse de l'autre— *lorsque leur produit est égal à l'idéal unité* (1).

Les normes d'idéaux inverses sont des nombres inverses, puisque leur produit est égal à la norme de l'idéal (1). Cette remarque, jointe à l'expression du produit de deux idéaux conjugués (**13**), conduit à la construction d'idéaux inverses.

THÉORÈME des idéaux inverses. — Deux idéaux dont les normes sont des nombres inverses et dont les facteurs canoniques sont des idéaux conjugués:

$$\mathbf{I}_1 = q_1\times(m,\ \theta—c),\quad \mathbf{I}_2 = q_2\times(m,\ \theta'—c);\qquad (q_1^2m)\times(q_2^2m) = 1$$

sont des *idéaux inverses.*

La vérification est immédiate. D'après cette propriété, tout idéal $\mathbf{I}$, non nul, a (au moins) un *inverse*, qui, suivant une notation usuelle est désigné par une *puissance* d'*exposant* —1:

$$\mathbf{I} = q\times(m,\ \theta—c) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I}^{-1} = (q\times m)^{-1}\times(m,\ \theta'—c).$$

Un raisonnement, dont le caractère général a déjà été rappelé (**1. 2**), permet de déduire de cette existence la possibilité et la détermination de la *division* (opération inverse de la multiplication) des idéaux, ce qui comprend notamment la *détermination* —ou l'unicité— de l'*idéal unité* et de l'*inverse d'un idéal.*

THÉORÈME de la division des idéaux. — Etant donnés: un idéal $\mathbf{D}$, appelé *dividende* et un idéal $\mathbf{I}$, non nul, appelé *diviseur*; *il existe un et un seul idéal* $\mathbf{J}$, appelé *quotient* de $\mathbf{D}$ par $\mathbf{I}$, dont le produit par le diviseur $\mathbf{I}$ est égal au dividende $\mathbf{D}$.

Le quotient d'un idéal, non nul, *par lui-même*, est égal à l'*idéal unité* (1), qui est, par suite le seul idéal neutre (**12. 2**) pour la multiplication.

Le quotient de l'idéal (1), par un idéal $\mathbf{I}$, non nul, est l'*idéal* $\mathbf{I}^{-1}$ (construit par le théorème précédent), qui est, par suite, le seul idéal inverse de $\mathbf{I}$.

Le *quotient*, d'un idéal $\mathbf{D}$ par un idéal $\mathbf{I}$, non nul, est égal au produit de $\mathbf{D}$ par $\mathbf{I}^{-1}$ —inverse de $\mathbf{I}$— :

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}^{-1} = (1)\ \begin{cases}\mathbf{I}\times\mathbf{J} = \mathbf{I} & \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} = (1);\\ \mathbf{I}\times\mathbf{J} = (1) & \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} = \mathbf{I}^{-1};\\ \mathbf{I}\times\mathbf{J} = \mathbf{D} & \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} = \mathbf{D}\times\mathbf{I}^{-1}.\end{cases}$$

La dernière équivalence est obtenue en multipliant les deux membres de l'égalité de gauche par $\mathbf{I}^{-1}$, ou les deux membres de l'égalité de droite par $\mathbf{I}$. La première et la seconde équivalence sont de conséquences de la dernière.

La construction de l'*inverse* (déterminé) d'*un idéal* **I**, non nul, est équivalente à la *multiplication de son conjugué* **I'** *par l'inverse de leur norme commune.*

Cette règle est applicable à un idéal défini par une base (algébrique ou arithmétique), son inverse est défini par la base obtenu en multipliant les conjugués des éléments de la base de **I** par l'inverse de la norme de **I**. Pour un idéal principal, ceci donne une expression évidente par elle-même:

$$(\rho)^{-1} = (\rho' : N(\rho)) = \rho' \times (\rho^{-1} \times \rho'^{-1}) = (\rho^{-1}).$$

L'existence et les propriétés de la multiplication et de la division des idéaux, non nuls, peuvent être (partiellement) exprimées en disant que:

Les idéaux (fractionnaires) *non nuls*, d'un corps quadratique $\mathbf{R}(\theta)$, constituent un **groupe multiplicatif abélien** —ou commutatif— . Il sera, en général, désigné par $\mathcal{G}(\theta)$, ou simplement $\mathcal{G}$.

Ce groupe contient notamment les *puissances d'exposants entiers* (quelconques) de chacun de ses éléments, définies (suivant les notations usuelles) par les formules:

$$h \text{ entier positif:} \quad \mathbf{I}^h = \mathbf{I} \times \ldots \times \mathbf{I} \quad (h \text{ facteurs égaux});$$
$$\mathbf{I}^{-h} = (\mathbf{I}^{-1})^h = (\mathbf{I}^h)^{-1}; \quad \mathbf{I}^0 = (1).$$

Ces puissances vérifient manifestement les règles usuelles de calcul:

$$\mathbf{I}^h \times \mathbf{I}^k = \mathbf{I}^{h+k}; \quad (\mathbf{I}^h)^k = \mathbf{I}^{h \times k}; \quad h,k \text{ entiers quelconques.}$$

Le groupe contient, par suite, les *monômes*, ou produits de puissances, $\mathbf{I}_1^{h1} \times \mathbf{I}_2^{h2} \times ..$, dont les règles de calcul sont également usuelles

14 bis. Sous groupe des idéaux principaux rationnels.

Dans le groupe $\mathcal{G}(\theta)$, la famille des idéaux principaux rationnels (q) (**11**) constitue un sous-groupe, qui sera noté $\mathfrak{Q}$, **isomorphe** au groupe multiplicatif des nombres rationnels positifs q.