CHAPITRE IV CRIBLES

CHAPITRE IV

CRIBLES

27. Calcul des diviseurs premiers.

Les propriétés des idéaux canoniques, dans un corps quadratique, et des idéaux réduits, peuvent être interprétées sous la forme de propriétés des *nombres premiers* (rationnels), analogues à celles du « crible d'Eratosthène ». On reprend, en se plaçant à ce point de vue, les constructions et définitions déjà indiquées, en sorte que le chapitre actuel peut être considéré comme indépendant des autres.

On forme, pour les valeurs entières de x, croissantes à partir de 0, *la suite des valeurs d'un trinôme du second degré :*

$$F(x) = x^2+Sx+N; \quad \begin{cases} S = -1; & N \text{ quelconque;} \\ S = 0; & N \not\equiv +1; \pmod 4; \end{cases}$$

sous la réserve que *le discriminant* $D = S^2-4N$, *n'ait pas de facteur carré*, à l'exclusion de 4 (si $S = 0$); et ne soit pas égal à $+4$.

On se propose de chercher *les facteurs premiers qui sont des diviseurs des valeurs de cette suite.*

A cet effet, on détermine un *rang* r, tel que pour tout x, au moins égal à r:

$$|F(x)| < (2x-S)^2.$$

Cette condition est d'ailleurs équivalente, suivant le cas (**25**) à:

$$D>0; \quad 5(2x-S)^2>D \Leftrightarrow x\geqslant r;$$
$$D<0; \quad 3(2x-S)^2>|D| \Leftrightarrow x\geqslant r$$

(dans le cas de D positif, $F(x)$ est négatif, notamment pour toutes les valeurs de x strictement inférieures à r).

On appelle **racine minimum** $\bar{c}_p$, d'un nombre (entier rationnel) premier p, *la plus petite valeur entière de* x (nulle ou positive) s'il en existe, *telle que* $|F(x)|$ *soit divisible par* p.

Les valeurs de x pour lesquelles $|F(x)|$ est divisible par p (zéros de la congruence fondamentale; (**5**), sont alors les termes de deux progressions arithmétiques, de raison p:

$$\bar{c}_p+\lambda p; \quad S—\bar{c}_p+(\lambda+1)p; \qquad (\lambda \text{ entier } \geqslant 0).$$

Ces deux progressions sont confondues si $2\bar{c}_p—S = p$; alors p est diviseur du discriminant.

Ces propriétés résultent de la construction des idéaux (**7** et **21**) les valeurs de x sont les racines des deux idéaux canoniques conjugués, de norme p, donc premiers et de produit égal à l'idéal principal (p). On peut aussi les établir directement comme conséquences de l'étude de la *congruence fondamentale* (**5**) pour un module premier.

On peut alors prendre comme base de l'algorithme du crible, la propriété fondamentale suivante.

Pour chaque valeur de x, au moins égale au rang r, *si un nombre premier* p *est diviseur de* $F(x)$ *et si son carré est au plus égal à* $|F(x)|$, *sa racine minimum* $\bar{c}_p$ *est* (strictement) *inférieure à* x —ou il est diviseur d'une valeur antérieure du tableau— .

$$x \geqslant \mathrm{r}; \ p \text{ diviseur de } |F(x)|; \ p^2 \leqslant |F(x)|: \\ \Rightarrow \text{ Existe } \bar{c}_p < x \quad \text{et} \quad p \text{ diviseur de } |F(\bar{c}_p)|.$$

On peut vérifier directement cette propriété en conjuguant la définition de r et la limitation de p^2:

$$x \geqslant r \quad \Rightarrow \quad p^2 \leqslant |F(x)| < (2x—S)^2 \\ \Rightarrow \quad (2\bar{c}_p—S)^2 \leqslant p^2 < (2x—S)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_p < x.$$

On peut aussi bien considérer l'idéal canonique de norme p, de racines $x+\lambda p$ et sa racine minimum (non négative) $\bar{c}_p$. S'il est réduit, $\bar{c}_p$ est inférieur à r, donc à x. S'il n'est pas réduit $|F(\bar{c}_p)|$ est inférieur à p^2, de sorte que x ne peut être égal à $\bar{c}_p$, donc lui est supérieur.

On choisit un nombre h, au moins égal à $r-1$ ($r-1 \leqslant h < H$), on considère les h premières valeurs de la suite et on décompose chacune d'elles en un produit de facteurs premiers p.

On détermine, pour chacune des valeurs successives de x ($h < x \leqslant H$), les puissances des nombres premiers p, précédemment obtenus, qui divisent exactement $|F(x)|$; on forme, pour chaque x, le quotient q_x de $|F(x)|$ par le produit de ces puissances.

1. *Le premier quotient* q_c, ainsi obtenu ($c > h$), *qui soit différent de* 1 *est un nombre premier.*

2. *Les quotients suivants*, pour les valeurs de x, ($h < x < h_1$), vérifiant la condition (c déterminé comme il vient d'être dit):

$$|F(x)| < (2c-S)^2;$$

sont égaux à 1, *ou sont des nombres premiers.*

1. Quel que soit le diviseur premier p, du quotient q_c, il n'est pas diviseur d'une valeur antérieure $|F(x)|$, sa racine minimum est c et p^2 est supérieur à $|F(c)|$ (c étant au moins égal à r). Donc:

$$p^2 > |F(c)| \geqslant q_c.$$

Or il y a au plus un diviseur de q_c, dont le carré lui est supérieur; de sorte que si q_x est différent de 1, il est égal à son seul facteur premier p.

2. Si un quotient q_x, pour $x > c$, est différent de 1 et n'est pas premier, il admet au moins un facteur premier p_1 dont le carré lui est au plus égal. Ce facteur ne divise aucune des valeurs antérieures à $F(c)$ et sa racine minimum c_1 est au moins égale à c, de sorte que:

$$(2c-S)^2 \leqslant (2c_1-S)^2 \leqslant p_1^2 \leqslant q_x \leqslant |F(x)|.$$

Ce quotient q_x ne peut donc être obtenu que pour une valeur de x, au delà des limites fixées par l'énoncé.

Ces règles peuvent s'appliquer par récurrence ascendante à des suites de valeurs croissantes $h_0 \geqslant r-1$; $h_1 > h_0$; ...

28. Exemples de calculs.

Le tableau V donne les valeurs pour x de 0 à $H = 100$, du trinôme $F(x)$ déjà utilisé (tableaux I et III), de discriminant $D = -39$. Le *rang* r (**25**) est égal à 2.

Les *deux premières valeurs* de $F(x)$, ont pour diviseurs premiers **2**, **3**, **5**, qui sont des diviseurs de $F(x)$, pour les valeurs respectives:

$$0+2\lambda,\ 1+2\lambda;\quad 0+5\lambda,\ 4+5\lambda;\quad 1+3\lambda.$$

Il n'y a qu'une progression pour 3, qui est diviseur de D.

On a inscrit devant chaque valeur de la table, le monôme des puissances des facteurs 2, 3, 5, qui en est diviseur, de façon à calculer les quotients q_x. Les périodicités, ou les progressions sont mises en évidence par l'alignement (vertical) de ces facteurs.

Le *premier quotient*, rencontré ensuite, qui soit différent de 1 est $F(3):2 = \mathbf{11}$. Il est premier, on l'a inscrit devant les valeurs dont il est diviseur et qui sont données par les progressions de raison 11 et de premiers termes 3 et 7. Deux seulement $F(51)$ et $F(69)$ sont divisibles par une puissance supérieure de 11; les autres appartenant à des progressions de raison 11^2 sont extérieures à la table.

Le premier quotient obtenu ensuite, qui soit différent de 1 est $F(6):2^2 = \mathbf{13}$. C'est un nombre premier, diviseur de D; il n'est obtenu que pour les valeurs d'une seule progression $6+13\lambda$, et seulement à la première puissance.

Les quotients suivants, jusqu'à $F(13)$ exclus, qui devient supérieur à $(2\times6+1)^2 = 169$, sont égaux à 1, ou sont premiers:

$F(7):(2\times3\times11) = 1$; $F(8):2 = \mathbf{41}$; $F(9):(2^2\times5^2) = 1$;
$F(10):(2^3\times3\times5) = 1$; $F(11):2 = \mathbf{71}$; $F(12):2 = \mathbf{83}$.

On inscrit ces nombres premiers devant les valeurs de la table, dont ils sont diviseurs, et qui sont données par:

41 pour $x = 8, 49, 90;\ 32, 73;$ **71** pour $x = 11, 82;\ 59;$
83 pour $x = 12, 95;\ 70;$

ils n'y figurent qu'à la première puissance.

Le premier quotient différent de 1, qui est rencontré ensuite est $F(16):(2\times3) = \mathbf{47}$; il est premier et il en est de même de ceux des

quotients suivants, qui sont différents de 1, jusqu'à $F(33)$ exclus, qui est supérieur à $(2\times16 + 1)^2 = 1\,089$. Certains sont encore diviseurs d'autres valeurs du tableau, ce sont:

47 pour $x = 16, 63;\ 30, 77;$ **79** pour $x = 17, 96;\ 61;$
43 pour $x = 20, 63;\ 22, 65;$ **59** pour $x = 21, 80;\ 37, 96;$
61 pour $x = 24, 85;\ 36, 97;$ **89** pour $x = 26;\ 62.$

Par contre, les diviseurs premiers **281**, **383**, **137**, ne se rencontrent plus dans le tableau, limité à $H = 100$.

Le premier quotient rencontré ensuite, est $F(33): 2^2 =$ **283**; il est premier et il en est de même de ceux des quotients suivants qui sont différents de 1 jusqu'à $F(67)$ exclus qui est supérieur à $(2\times33 + 1)^2 = 4\,489$. Dans ces quotients, ceux qui figurent plus d'une fois dans le tableau, limité à $H = 100$, sont:

127 pour $x = 35;\ 91;$ **103** pour $x = 47;\ 55;$
149 pour $x = 54;\ 94;$ **139** pour $x = 64;\ 74.$

Le premier quotient rencontré ensuite est $F(67): (2\times3) =$ **761**; il est premier et il en est de même de tous les quotients suivants de la table, car $(2\times67 + 1)^2 = 18\,225$ est supérieur à $F(100)$.

Dans la table, les nombres en caractères gras sont les facteurs p rencontrés pour leur racine minimum $\bar{c}_p$ (ou pour la première fois).

On rappelle qu'il a été indiqué ci-dessus que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à douze progressions arithmétiques de raison commune 39.

Le *deuxième exemple*, donné dans le tableau VI, est constitué par les valeurs pour x de O à $H = 100$, du trinôme, de discriminant D positif (définissant un corps réel):

$$F(x) = x^2 - 47; \qquad D = (-4)\times(-47) = 188.$$

Les valeurs sont négatives et de valeurs absolues décroissantes jusqu'à $F(6)$; elles sont ensuite positives et croissantes.

Le rang r est égal à 4, car:

$$5\times(2\times3)^2 = 180 < 4\times47 < 5\times(2\times4)^2 = 320.$$

Les quatre premières valeurs de $F(x)$ ont pour diviseurs premiers: **2**, **47**, qui sont diviseurs de D, et **23**, **43**, **19**. On inscrit devant chaque valeur les monômes de ces facteurs qui en sont des diviseurs.

TABLEAU V.

$F(x) = x^2+x+10 \qquad D = -39 = (-3)\times 13 \qquad r = 2.$

c	$F(c)$	Diviseurs
0	10	**2. 5**
1	12	2^2. **3**
2	16	2^4
3	22	2. **11**
4	30	2. 3. 5
5	40	2^3. 5
6	52	2^2. **13**
7	66	2. 3 *11*
8	82	2. **41**
9	100	2^2. 5^2
10	120	2^3. 3. 5
11	142	2. **71**
12	166	2. **83**
13	192	2^6. 3
14	220	2^2. 5. 11
15	250	2. 5^3
16	282	2. 3 **47**
17	316	2^2. **79**
18	352	2^5. 11
19	390	2. 3. 5. 13
20	430	2. 5. **43**
21	472	2^3. **59**
22	516	2^2. 3. *43*
23	562	2. **281**
24	610	2. 5. **61**
25	660	2^2. 3. 5. 11
26	712	2^3. **89**
27	766	2. **383**
28	822	2. 3. **137**
29	880	2^4. 5. 11
30	940	2^2. 5. *47*
31	1 002	2. 3. **167**
32	1 066	2. 13. *41*
33	1 132	2^2. **283**
34	1 200	2^4. 3. 5^2.
35	1 270	2. 5. **127**
36	1 342	2. 11. *61*
37	1 416	2^3. 3. *59*
38	1 492	2^2. **373**
39	1 570	2. 5. **157**
40	1 650	2. 3. 5^2. 11
41	1 732	2^2. **433**
42	1 816	2^3. **227**
43	1 902	2. 3. **317**
44	1 990	2. 5. **199**
45	2 080	2^5. 5. 13
46	2 172	2^2. 3. **181**
47	2 266	2. 11. **103**
48	2 362	2. **1 181**
49	2 460	2^2. 3. 5. 41
50	2 560	2^9. 5.
51	2 662	2. 11^3
52	2 766	2. 3. **461**
53	2 872	2^3. **359**
54	2 980	2^2. 5. **149**
55	3 090	2. 3. 5. *103*
56	3 202	2. **1 601**
57	3 316	2^2. **829**
58	3 432	2^3. 3. 11. 13
59	3 550	2. 5^2. *71*
60	3 670	2. 5. **367**
61	3 792	2^4. 3. *79*
62	3 916	2^2. 11. *89*
63	4 042	2. 43. 47
64	4 170	2. 3. 5. **139**
65	4 300	2^2. 5^2. 43
66	4 432	2^4. **277**
67	4 566	2. 3. **761**
68	4 702	2. **2 351**
69	4 840	2^3. 5.11^2
70	4 980	2^2. 3. 5. *83*
71	5 122	2. 13. **197**
72	5 266	2. **2 633**
73	5 412	2^2. 3. 11. 41
74	5 560	2^3. 5. *139*
75	5 710	2. 5. **571**
76	5 862	2. 3. **977**
77	6 016	2^7. 47
78	6 172	2^2. **1 543**
79	6 330	2. 3. 5. **211**
80	6 490	2. 5. 11. 59
81	6 652	2^2. **1 663**
82	6 816	2^5. 3. 71
83	6 982	2. **3 491**
84	7 150	2. 5^2. 11. 13
85	7 320	2^3. 3. 5. 61
86	7 492	2^2. **1 873**
87	7 666	2. **3 833**
88	7 842	2. 3. **1 307**
89	8 020	2^2. 5. **401**
90	8 200	2^3. 5^2. 41
91	8 382	2. 3. 11. *127*
92	8 566	2. **4 283**
93	8 752	2^4. **547**
94	8 940	2^2. 3. 5. *149*
95	9 130	2. 5. 11. 83
96	9 322	2. 59. 79
97	9 516	2^2. 3. 13. 61
98	9 712	2^4. **607**
99	9 910	2. 5. **991**
100	10 110	2. 3. 5. **337**

Les quotients suivants, pour les valeurs de x, définies par:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 4)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 10$$

sont uniquement des valeurs, ou des moitiés de valeurs du polynôme puisqu'à l'exception du diviseur 2, la première valeur devant laquelle on a inscrit un des diviseurs précédents est $F(16)$ divisible par 19. Ce sont:

$F(4) = -\mathbf{31}$; $F(5):2 = -\mathbf{11}$; $F(6) = -11$; $F(7):2 = +2$;
$F(8) = +\mathbf{17}$; $F(9):2 = +17$; $F(10) = +\mathbf{53}$.

On les inscrit devant les valeurs suivantes de la table qu'ils divisent, éventuellement avec l'exposant convenable.

Le quotient suivant $F(11):2 = +\mathbf{37}$ est premier; ceux qui suivent pour les valeurs de x:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 11)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 23,$$

sont égaux à 1, ou sont premiers. Ces derniers sont encore égaux aux valeurs, ou aux moitiés des valeurs du polynôme; les seuls quotients donnés par des diviseurs déjà inscrits, à l'exception de 2, sont:

$$F(16):(19\times 11) = +1; \qquad F(22):(23\times 19) = +1.$$

Les seuls nombres premiers ainsi obtenus qui figurent encore dans la table, limitée à $H = 100$, sont **37**, **97**, **61**, **89**.

Le premier quotient suivant qui est différent de 1 est $F(28):11 = \mathbf{67}$, ceux qui suivant pour les valeurs de x:

$$|F(x)| \leqslant (2\times 28)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 56,$$

sont égaux à 1 ou premiers; ceux qui figurent plus d'une fois dans la table sont: **67**, **127**, **101**, **107**, **151**.

Au-delà de $x = 56$, tous les quotients sont premiers ou égaux à 1.

La disposition typographique est semblable à celle de l'exemple précédent, les nombres premiers obtenus pour la première fois (pour leur racine minimum) sont en caractères gras.

L'application de la loi de la réciprocité (**22**) montre que les nombres premiers ainsi obtenus sont ceux qui appartiennent à $\varphi(168):2 = 46$ progressions arithmétiques, de raison commune 168 et de premiers termes: 1, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 31, 35, 37, 39, 43, 49, 53, 61, 65, 67, 81, 87, 89, 91, 97, 99, 101, 107, 121, 123, 127, 135, 139, 145, 149, 151, 153, 157, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 177, 179, 187.

TABLEAU VI.

$F(x) = x^2 - 47$ $\quad D = 188 = (-4) \times (-47)$ $\quad r = 4.$

c	$F(c)$	Diviseurs
0	— 47	**47**
1	— 46	**2. 23**
2	— 43	**43**
3	— 38	2. **19**
4	— 31	**31**
5	— 22	2. **11**
6	— 11	*11*
7	+ 2	2.
8	17	**17**
9	34	2. 17
10	53	**53**
11	74	2. **37**
12	97	**97**
13	122	2. **61**
14	149	**149**
15	178	2. **89**
16	209	*19.* 11
17	242	2.11^2
18	277	**277**
19	314	2. **157**
20	353	**353**
21	394	2. **197**
22	437	*23.* 19
23	482	2. **241**
24	529	23^2

c	$F(c)$	Diviseurs
25	578	$2. 17^2$
26	629	17. *37*
27	682	2. *31.* 11
28	737	11. **67**
29	794	2. **397**
30	853	**853**
31	914	2. **457**
32	977	**977**
33	1 042	2. **521**
34	1 109	**1 109**
35	1 178	2. 19. 31
36	1 249	**1 249**
37	1 322	2. **661**
38	1 397	11. **127**
39	1 474	2. 11. *67*
40	1 553	1 553
41	1 634	2. *43.* 19
42	1 717	17. **101**
43	1 802	2. 17. *53*
44	1 889	**1 889**
45	1 978	2. 23. 43
46	2 069	**2 069**
47	2 162	2. 47. 23
48	2 257	37. *61*
49	2 354	2. 11. **107**

c	$F(c)$	Diviseurs
50	2 453	11. **223**
51	2 554	2. **1 277**
52	2 657	**2 657**
53	2 762	2. **1 381**
54	2 869	19. **151**
55	2 978	2. **1 489**
56	3 089	**3 089**
57	3 202	2. **1 601**
58	3 317	31. *107*
59	3 434	2. 17. *101*
60	3 553	19. 11. 17
61	3 674	2. 11. **167**
62	3 797	**3 797**
63	3 922	2. 53. 37
64	4 049	**4 049**
65	4 178	2. **2 089**
66	4 309	31. **139**
67	4 442	2. **2 221**
68	4 577	23. **199**
69	4 714	2. **2 357**
70	4 853	23. **211**
71	4 994	2. 11. **227**
72	5 137	11. **467**
73	5 282	2. 19. *139*
74	5 429	61. *89*

c	$F(c)$	Diviseurs
75	5 578	2. **2 789**
76	5 729	17. **337**
77	5 882	2. 17. **173**
78	6 037	**6 037**
79	6 194	2. 19. **163**
80	6 353	**6 353**
81	6 514	2. **3 257**
82	6 677	11. **607**
83	6 842	2. 11. **311**
84	7 009	43. *163*
85	7 178	2. 37. *97*
86	7 349	**7 349**
87	7 522	2. **3 761**
88	7 697	43. **179**
89	7 874	2. 31. *127*
90	8 053	**8 053**
91	8 234	2. 23. *179*
92	8 417	19. **443**
93	8 602	2. 23. 11. 17
94	8 789	47. 11. 17.
95	8 978	$2. 67^2.$
96	9 169	53. *173*
97	9 362	2. 31. *151*
98	9 557	19. **503**
99	9 754	2. **4 877**
100	9 953	37. **269**

29. Successions de nombres premiers.

Dans le deuxième exemple traité, les quinze premières valeurs de $|F(x)|$ sont des nombres premiers ou des doubles de nombres premiers. Cette particularité tient à ce que les valeurs de $|F(x)|$ pour $x < r$, sont des nombres premiers relativement grands, qui ne se retrouvent, par suite, dans la table, qu'à des rangs relativement éloignés. Il existe d'autres exemples de ce même phénomène.

Un exemple (bien connu, au moins depuis Euler) est constitué par les valeurs du trinôme (à discriminant D négatif):

$$F(x) = x^2+x+41; \quad D = -163.$$

Le tableau VII en donne les valeurs pour les valeurs entières de x, de 0 à 299; pour celles qui ne sont pas des nombres premiers, on a seulement inscrit leur décomposition en facteurs premiers.

Les quarantes premières valeurs de $F(x)$ sont des nombres premiers.

Le rang r est égal à 4; les quatre premières valeurs sont les nombres premiers:

$$41, \quad 43, \quad 47, \quad 53.$$

Ils ne se retrouvent comme facteurs qu'au-delà de $x = 39$. On peut montrer par récurrence sur c, compris entre 4 et 39 inclus, que $F(c)$ est un nombre premier, de racine minimum égale à c. Car, il en est ainsi pour $F(4)$, et, par hypothèse de récurrence, pour toute valeur $F(x)$, x étant compris entre 0 inclus et c exclus; en outre la racine conjuguée du nombre premier $F(x)$ est supérieure à 39, puisque

$$\mathrm{F}(x)-x-1 = x^2+40 \geqslant 40.$$

Il s'en suit que $\mathrm{F}(c)$ ne peut être divisible par aucun des nombres premiers $F(x)$, il est donc premier et de racine minimum c.

A l'exclusion des sept décompositions:

$$F(40) = 41^2, \quad F(41) = 41\times 43, \quad F(44) = 43\times 47,$$
$$F(49) = 47\times 53, \quad F(56) = 53\times 61, \quad F(65) = 61\times 71,$$
$$F(76) = 71\times 83$$

les valeurs de $F(40)$ à $F(80)$, sont des nombres premiers (soient 34 nombres premiers nouveaux).

TABLEAU VII.

$F(x) = x^2+x+41$; discriminant: —163; $r = 4$.

x	$F(x)$
0	41
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
9	131
10	151
11	173
12	197
13	223
14	251
15	281
16	313
17	347
18	383
19	421
20	461
21	503
22	547
23	593
24	641
25	691
26	743
27	797
28	853
29	911
30	971
31	1 033
32	1 097
33	1 163
34	1 231
35	1 301
36	1 373
37	1 447
38	1 523
39	1 601
40	41^2
41	41×43

x	$F(x)$
42	1 847
43	1 933
44	43×47
45	2 111
46	2 203
47	2 297
48	2 393
49	47×53
50	2 591
51	2 693
52	2 797
53	2 903
54	3 011
55	3 121
56	53×61
57	3 347
58	3 463
59	3 581
60	3 701
61	3 823
62	3 947
63	4 073
64	4 201
65	61×71
66	4 463
67	4 597
68	4 733
69	4 871
70	5 011
71	5 153
72	5 297
73	5 443
74	5 591
75	5 741
76	71×83
77	6 047
78	6 203
79	6 361
80	6 521
81	$41 \times \mathbf{163}$
82	$41 \times \mathbf{167}$
83	7 013

x	$F(x)$
84	43×167
85	7 351
86	7 523
87	$43 \times \mathbf{179}$
88	7 873
89	83×97
90	8 231
91	47×179
92	8 597
93	8 783
94	8 971
95	9 161
96	$47 \times \mathbf{199}$
97	9 547
98	9 743
99	9 941
100	10 141
101	10 343
102	53×199
103	10 753
104	97×113
105	11 171
106	11 383
107	11 597
108	11 813
109	$53 \times \mathbf{227}$
110	12 251
111	12 473
112	12 697
113	12 923
114	13 151
115	13 381
116	13 613
117	61×227
118	14 083
119	14 321
120	14 561
121	113×131
122	$41 \times \mathbf{367}$
123	$41 \times \mathbf{373}$
124	15 541
125	15 791

x	$F(x)$
126	$61 \times \mathbf{263}$
127	$43 \times \mathbf{379}$
128	16 553
129	16 811
130	$43 \times \mathbf{397}$
131	17 333
132	17 597
133	17 863
134	18 131
135	18 401
136	71×263
137	18 947
138	$47 \times \mathbf{409}$
139	19 501
140	131×151
141	20 063
142	20 347
143	$47 \times \mathbf{439}$
144	20 921
145	21 211
146	21 503
147	$71 \times \mathbf{307}$
148	22 093
149	22 391
150	22 691
151	22 993
152	23 297
153	23 603
154	23 911
155	$53 \times \mathbf{457}$
156	24 533
157	24 847
158	25 163
159	83×307
160	25 801
161	151×173
162	$53 \times \mathbf{499}$
163	$41 \times \mathbf{653}$
164	$41 \times \mathbf{661}$
165	27 431
166	27 763
167	28 097

TABLEAU VII *(suite)*.

x	$F(x)$
168	28 433
169	28 771
170	$43 \times \mathbf{677}$
171	29 453
172	$83 \times \mathbf{359}$
173	$43 \times \mathbf{701}$
174	30 491
175	30 841
176	31 193
177	31 547
178	$61 \times \mathbf{523}$
179	32 261
180	32 621
181	32 983
182	33 347
183	33 713
184	$\mathit{173} \times \mathit{197}$
185	$47 \times \mathbf{733}$
186	$97 \times \mathit{359}$
187	$61 \times \mathbf{577}$
188	35 573
189	35 951
190	$47 \times \mathbf{773}$
191	36 713
192	37 097
193	37 483
194	37 871
195	38 261
196	38 653
197	39 047
198	39 443
199	39 841
200	40 241

x	$F(x)$
201	$97 \times \mathbf{419}$
202	41 047
203	41 453
204	$41 \times \mathbf{1\,021}$
205	$41 \times \mathbf{1\,031}$
206	42 683
207	$71 \times \mathbf{607}$
208	$53 \times \mathbf{821}$
209	$197 \times \mathit{223}$
210	44 351
211	44 773
212	45 197
213	$43 \times \mathbf{1\,061}$
214	46 051
215	$53 \times \mathbf{877}$
216	$43 \times \mathbf{1\,091}$
217	$113 \times \mathit{419}$
218	$71 \times \mathbf{673}$
219	48 221
220	48 661
221	49 103
222	49 547
223	49 993
224	50 441
225	50 891
226	51 343
227	51 797
228	52 253
229	52 711
230	53 171
231	53 633
232	$47 \times \mathbf{1\,151}$
233	54 563

x	$F(x)$
234	$113 \times \mathbf{487}$
235	55 501
236	$223 \times \mathit{251}$
237	$47 \times \mathbf{1\,201}$
238	56 923
239	$61 \times \mathbf{941}$
240	57 881
241	58 363
242	$83 \times \mathbf{709}$
243	59 333
244	$163 \times \mathit{367}$
245	$41 \times \mathbf{1\,471}$
246	$41 \times \mathbf{1\,483}$
247	61 297
248	$61 \times \mathbf{1\,013}$
249	$167 \times \mathit{373}$
250	62 791
251	$167 \times \mathit{379}$
252	$131 \times \mathit{487}$
253	64 303
254	64 811
255	$83 \times \mathbf{787}$
256	$43 \times \mathbf{1\,531}$
257	66 347
258	66 863
259	$43 \times \mathbf{1\,567}$
260	67 901
261	$53 \times \mathbf{1\,291}$
262	68 947
263	69 473
264	70 001
265	$251 \times \mathit{281}$
266	$179 \times \mathit{397}$

x	$F(x)$
267	71 597
268	$53 \times \mathbf{1\,361}$
269	72 671
270	$179 \times \mathit{409}$
271	$131 \times \mathbf{563}$
272	74 297
273	74 843
274	75 391
275	75 941
276	76 493
277	77 047
278	$71 \times \mathbf{1\,093}$
279	$47 \times \mathbf{1\,663}$
280	78 721
281	79 283
282	79 847
283	$97 \times \mathbf{829}$
284	$47 \times \mathbf{1\,723}$
285	81 551
286	$41 \times \mathbf{2\,003}$
287	$41 \times \mathbf{2\,017}$
288	83 273
289	$71 \times \mathbf{1\,181}$
290	84 431
291	$151 \times \mathit{563}$
292	85 597
293	86 183
294	86 771
295	$199 \times \mathit{439}$
296	$281 \times \mathit{313}$
297	88 547
298	$97 \times \mathbf{919}$
299	$43 \times \mathbf{2\,087}$

Au-delà de $F(40)$, on inscrit les premiers nombres premiers de la table devant les valeurs qu'ils divisent, on obtient les sept décompositions indiquées; puis $F(81) = 41 \times \mathbf{163}$, qui comporte un diviseur premier non encore obtenu, ou de racine minimum 81.

A toute valeur $F(c)$, pour c compris entre 7 et 80 inclus, exception faite des valeurs de décomposition, on peut appliquer le raisonnement de récurrence précédent. Tout $F(x)$, de $F(6)$ à $F(c)$ exclus, étant

supposé premier, de racine minimum x, sa racine conjuguée est supérieure à 81, car:

$$F(x)—x—1 = x^2+40 \geqslant 49+40 = 89.$$

Il ne divise donc pas $F(c)$, qui n'étant pas divisible par les valeurs de $F(0)$ à $F(6)$ est un nombre premier de racine minium c.

Pour toutes les valeurs de x, au-delà de 80 et telles que:

$$F(x) \leqslant (2\times 80+1)^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 161,$$

les quotients obtenus (après division éventuelle par les monômes des nombres premiers précédents, qui peuvent être limités aux douze premiers), sont des nombres premiers ou sont égaux à 1.

Certains sont diviseurs de valeurs ultérieures du tableau concurremment avec des nombres premiers déjà trouvés. On les inscrit et on forme les quotients qui sont tous premiers ou égaux à 1, dans la limite de la table, dont les valeurs restantes sont inférieures à $(2\times 161+1)^2$.

On a indiqué, en caractère gras, les nombres premiers obtenus comme facteur d'une décomposition effective. Leur fréquence augmente naturellement, dans le prolongement de la table. On peut même trouver une suite de valeurs $F(x)$, en nombre H, arbitrairement grand, dont aucune ne soit un nombre premier.

Il suffit de prendre x compris entre P et $P+H$, le nombre P étant le produit des facteurs premiers qui divisent les H premières valeurs $|F(c)|$. Il est manifeste que chacune des valeurs $F(x)$, ainsi considérées est divisible par au moins un de ces nombres premiers, sans lui être égal (H étant pris au moins égal à r).

Cependant on ne peut pas affirmer qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs $F(x)$ qui soient des nombres premiers.

Le *tableau VIII* donne *trois autres exemples*, de types différents, limités chacun aux soixante premières valeurs des trinômes.

Pour le trinôme, de discriminant D positif, impair;

$$F(x) = x^2+x—109; \qquad D = 347 = (—19)\times(—23);$$

les *vingt-huit premières valeurs sont des nombres premiers.*

Pour chacune d'elles la deuxième racine est supérieure à 27;

(pour $F(9) = -19$, et $F(11) = +23$, qui sont diviseurs du discriminant, les deux progressions sont confondues).

Dans les dix-neuf valeurs suivantes, seize *sont des nombres premiers*, les trois autres étant des produits de nombres premiers déjà obtenus:

$$F(28) = 19 \times 37; \quad F(34) = 23 \times 47; \quad F(45) = 37 \times 53.$$

(Le raisonnement fait par récurrence dans l'exemple précédent reste valable.)

La valeur suivante $F(47)$ est divisible par 19; mais le quotient est un nouveau nombre premier, ou de racine minimum 47.

Tous les *quotients* des valeurs restantes sont des nombres premiers ou sont égaux à 1.

Pour le trinôme de discriminant D positif, multiple de 4:

$$F(x) = x^2 - 83; \quad D = 332 = (-4) \times (-83)$$

2 étant diviseur du discriminant, toutes les valeurs, pour x impair sont divisibles par 2, mais non par 4.

Les *vingt-quatre premières valeurs* sont des *nombres premiers ou des doubles de nombres premiers*. Toutefois deux facteurs premiers se trouvent deux fois et un d'eux est égal à 1:

$$\mathbf{17} = |F(7)| : 2 = F(10); \quad \mathbf{19} = |F(8)| = F(11) : 2;$$
$$\mathbf{1} = |F(9)| : 2.$$

Dans les vingt valeurs suivantes: *treize sont des nombres premiers ou des doubles de nombres premiers*; les sept autres sont des produits ou des doubles de produits des nombres premiers impairs, précédemment obtenus.

Tous les quotients des valeurs restantes de la table, au-delà de $F(43)$, qui sont différents de 1 et de 2, sont des nombres premiers.

Pour le trinôme de discriminant négatif, multiple de 4:

$$F(x) = x^2 + 37; \quad D = -148 = (-4) \times (+37);$$

2 est encore diviseur du discriminant; toutes les valeurs pour x impair sont divisibles par 2, mais non par 4.

Les *dix-huit premières valeurs, ou leurs moitiés, sont des nombres premiers*. Dans les *trente-huit valeurs suivantes, vingt-neuf sont des nombres premiers ou des doubles de nombres premiers*; les neuf autres, ou leurs moitiés sont des produits des nombres premiers impairs déjà obtenus.

TABLEAU VIII.

$F(x)=x^2+x-109$; $D=(-19)\times(-23)$

c	F(c)	c	F(c)
0	−109	30	821
1	−107	31	823
2	−103	32	947
3	− 97	33	1 013
4	− 89	34	23×47
5	− 79	35	1 151
6	− 67	36	1 223
7	− 53	37	1 297
8	− 37	38	1 373
9	− 19	39	1 451
10	+ 1	40	1 531
11	23	41	1 613
12	47	42	1 697
13	73	43	1 783
14	101	44	1 871
15	131	45	37×53
16	163	46	2 053
17	197	47	$19\times\mathbf{113}$
18	233	48	2 243
19	271	49	2 341
20	311	50	2 441
21	353	51	2 543
22	397	52	2 647
23	443	53	2 753
24	491	54	2 861
25	541	55	2 971
26	593	56	3 083
27	647	57	$23\times\mathbf{139}$
28	19×37	58	3 313
29	761	59	47×73

(à suivre)

$F(x)=x^2-83$; $D=(-4)\times(-83)$

c	F(c)	c	F(c)
0	− 83	30	19×43
1	-2×41	31	2×439
2	− 79	32	941
3	-2×37	33	2×503
4	− 67	34	29×37
5	-2×29	35	2×571
6	− 47	36	1 213
7	-2×17	37	2×643
8	− 19	38	1 361
9	-2×1	39	2×719
10	+ 17	40	37×41
11	2×19	41	$2\times 17\times 47$
12	61	42	41×41
13	2×43	43	2×883
14	113	44	$17\times\mathbf{109}$
15	2×71	45	2×971
16	173	46	$19\times\mathbf{107}$
17	2×103	47	$2\times 1\,063$
18	241	48	2 221
19	2×139	49	$2\times 19\times 61$
20	317	50	2 417
21	2×179	51	$2\times 1\,259$
22	401	52	2 621
23	2×223	53	$2\times 29\times 47$
24	17×29	54	2 833
25	2×271	55	$2\times 1\,471$
26	593	56	43×71
27	$2\times 17\times 19$	57	$2\times 1\,583$
28	701	58	$17\times\mathbf{193}$
29	2×379	59	$2\times 1\,699$

$F(x)=x^2+37$; $D=(-4)\times(+37)$

c	F(c)	c	F(c)
0	37	30	937
1	2×19	31	2×499
2	41	32	1 061
3	2×23	33	2×563
4	53	34	1 193
5	2×31	35	2×631
6	73	36	31×43
7	2×43	37	$2\times 19\times 37$
8	101	38	1 481
9	2×59	39	$2\times 19\times 41$
10	137	40	1 637
11	2×79	41	2×859
12	181	42	1 801
13	2×103	43	$2\times 23\times 41$
14	233	44	1 973
15	2×131	45	$2\times 1\,031$
16	293	46	2 153
17	2×163	47	$2\times 1\,123$
18	19×19	48	2 341
19	2×199	49	$2\times 23\times 53$
20	19×23	50	43×59
21	2×239	51	$2\times 1\,319$
22	521	52	2 741
23	2×283	53	$2\times 1\,423$
24	613	54	2 953
25	2×331	55	$2\times 1\,531$
26	23×31	56	$19\times\mathbf{167}$
27	2×383	57	$2\times 31\times 53$
28	821	58	$19\times\mathbf{179}$
29	2×439	59	3 637