53. Corps à une seule classe double.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

401, qui comprend cinq *cycles*, formant *un groupe cyclique d'ordre* 5*;*

577, qui comprend sept *cycles*, formant *un groupe cyclique d'ordre* 7.

Le tableau XXVIII donne aussi les calculs des cycles pour trois de ces corps, de discriminants:

577: cycle **U** de trois idéaux; trois couples de cycles conjugués; **I**, **I**′ et **J**, **J**′ de chacun trois idéaux; **K**, **K**′ de chacun cinq idéaux;
401: cycle **U** de trois idéaux; deux couples de cycles conjugués; **I**, **I**′ de chacun trois idéaux; **J**, **J**′ de chacun cinq idéaux;
761: cycle **U** de cinq idéaux; deux cycles conjugués, **I**, **I**′ de chacun sept idéaux.

Pour des discriminants relativement élevés, le groupe de cycles (ou de classes) peut n'être pas cyclique. L'exemple de calcul de structure du tableau XXVII concerne un corps dont le discriminant, 62 501, est premier, et dont le groupe des cycles, d'ordre 9 est produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 3.

53. Corps à une seule classe double.

Le corps, de caractère exceptionnel, défini par le polynôme fondamental:

$$F(x) = x^2 - 2; \qquad D = 8;$$

a un seul idéal semi réduit, à la fois double et réfléchi, qui est l'idéal unité. Il n'y a donc qu'un seul cycle, d'un seul terme, et le corps, comme ce cycle, est principal.

A l'exception de ce corps, et en plus de ceux dont le discriminant est un nombre premier, il existe des corps qui n'ont qu'une seule classe double (conjuguée d'elle-même); ce sont ceux dont le discriminant a au plus deux facteurs premiers impairs, congrus à —1, mod. 4. En tenant compte des conditions de construction d'un corps réel (**1**), on obtient l'énoncé suivant:

Un corps réel, dont le discriminant D est:

Tableau XXVIII.

Exemples de corps de discriminant premier (corps principaux).

c	$-(x^2+x-79)$
0	79
1	77
2	73
3	67
4	59
5	$49 = 7\times 7$; $\mathbf{I}_2\times\mathbf{I}_2$
6	37
7	23
8	$7 = 1\times 7$; $\mathbf{I}_0\times\mathbf{I}_1$

$-(x^2+x-48)$	
48	
46	
$42 = 7\times 6$	$\mathbf{I}_6\times\mathbf{I}_8$
$36 = 9\times 4 = 6\times 6$;	$\mathbf{I}_4\times\mathbf{I}_{10}$; $\mathbf{I}_7\times\mathbf{I}_7$
$28 = 4\times 7$;	$\mathbf{I}_5\times\mathbf{I}_9$
$18 = 6\times 3 = 2\times 9$;	$\mathbf{I}_1\times\mathbf{I}_{13}$; $\mathbf{I}_3\times\mathbf{I}_{11}$
$6 = 1\times 6 = 3\times 2$;	$\mathbf{I}_0\times\mathbf{I}_{14}$; $\mathbf{I}_2\times\mathbf{I}_{12}$
. . . .	

(Corps non principaux.)

c	$-(x^2+x-144)$	
0	$144 = 12\times 12$;	$\mathbf{U}_1\times\mathbf{U}_1$
1	142	
2	138	
3	$132 = 11\times 12$;	$\mathbf{K}_3\times\mathbf{K}_1'$
4	124	
5	114	
6	$102 = 6\times 17$;	$\mathbf{J}_1\times\mathbf{J}_1'$
7	$88 = 8\times 11$;	$\mathbf{K}_2\times\mathbf{K}_2'$
8	$72 = 4\times 18$;	$\mathbf{I}_1\times\mathbf{I}_1'$
	$= 12\times 6$;	$\mathbf{K}_4\times\mathbf{K}_0'$
	$= 9\times 8$;	$\mathbf{K}_1\times\mathbf{K}_3'$
9	$54 = 18\times 3$;	$\mathbf{I}_2\times\mathbf{I}_0'$
	$= 6\times 9$;	$\mathbf{K}_0\times\mathbf{K}_0'$
10	$34 = 17\times 2$;	$\mathbf{J}_2\times\mathbf{J}_0'$
11	$12 = 1\times 12$;	$\mathbf{U}_0\times\mathbf{U}_2$
	$= 2\times 6$;	$\mathbf{J}_0\times\mathbf{J}_2'$
	$= 3\times 4$;	$\mathbf{I}_0\times\mathbf{I}_2'$
12	. . . .	
13		

$-(x^2+x-100)$	
$100 = 10^2$	$\mathbf{U}_1\times\mathbf{U}_1$
98	
94	
$88 = 8\times 11$;	$\mathbf{J}_3\times\mathbf{J}_1'$
$80 = 10\times 8$;	$\mathbf{J}_2\times\mathbf{J}_2'$
$70 = 5\times 14$;	$\mathbf{I}_1\times\mathbf{I}_1'$
$= 7\times 10$;	$\mathbf{J}_1\times\mathbf{J}_3'$
58	
$44 = 11\times 4$;	$\mathbf{J}_4\times\mathbf{J}_0'$
$28 = 14\times 2$;	$\mathbf{I}_2\times\mathbf{I}_0'$
$= 4\times 7$;	$\mathbf{J}_0\times\mathbf{J}_4'$
$10 = 1\times 10$;	$\mathbf{U}_0\times\mathbf{U}_2$
$= 2\times 5$;	$\mathbf{I}_0\times\mathbf{I}_2'$
. . . .	

$-(x^2+x-190)$		c
190		0
188		1
184		2
178		3
$170 = 10\times 17$;	$\mathbf{I}_5\times\mathbf{I}_1'$	4
$160 = 16\times 10$;	$\mathbf{I}_4\times\mathbf{I}_2'$	5
148		6
134		7
118		8
$100 = 20\times 5$;	$\mathbf{I}_2\times\mathbf{I}_4'$	9
$= 10\times 10$;	$\mathbf{U}_2\times\mathbf{U}_2$	
$80 = 4\times 20$;	$\mathbf{I}_1\times\mathbf{I}_5'$	10
$= 5\times 16$;	$\mathbf{I}_3\times\mathbf{I}_3'$	
$= 8\times 10$;	$\mathbf{U}_1\times\mathbf{U}_3$	
58		11
$34 = 17\times 2$;	$\mathbf{I}_6\times\mathbf{I}_0'$	12
$8 = 1\times 8$;	$\mathbf{U}_0\times\mathbf{U}_4$	13
$= 2\times 4$;	$\mathbf{I}_0\times\mathbf{I}_6'$	

1. impair, nécessairement congru à $+1$, mod. 4, *produit* $u \times v$, *de deux nombres premiers impairs, dont l'un*, et par suite l'autre, *est congru à* -1, mod. 4;

2. *produit par* 4 *d'un nombre premier* d, impair, nécessairement *congru à* -1, mod. 4;

3. *produit par* 4 *du double* $d = 2d'$, *d'un nombre premier* d', nécessairement impair, mais *congru à* -1, mod. 4;

ne contient qu'une seule classe double d'idéaux, nécessairement principale, caractérisée par un cycle du type 2, d'un nombre pair de termes. Il peut y exister, en outre, des *cycles du type* 4, répartis par couples de cycles conjugués, chacun ayant aussi un nombre pair d'idéaux.

Dans les trois cas, le discriminant D, considéré dans le corps $\mathbf{R}(i)$, est le produit de deux idéaux (principaux), dont l'un au moins est premier rationnel (u et v; ou d; ou d'; puisque congru à -1, mod. 4). Il n'est donc pas égal à une somme de carrés de deux nombres entiers (**20**) et le corps ne contient pas d'idéal semi réduit réfléchi (deuxième théorème d'existence de **43**).

Par contre il existe deux, et seulement deux idéaux semi réduits doubles, car D a seulement deux diviseurs dont le carré lui soit inférieur et qui sont, suivant les cas:

$$1 \text{ et } u \text{ ou } v; \qquad 1 \text{ et } 2$$

ceci puisque, dans le second cas, d étant au moins égal à 3:

$$2^2 < D = 4d; \quad \text{et} \quad d^2 > D:4 = d;$$

et que, dans le troisième cas, d' étant au moins égal à 3 ($D = 8$ étant excepté):

$$2^2 < D:4 = 2d'; \quad \text{et} \quad d'^2 > D:4 = 2d'.$$

Il n'y a donc qu'un seul cycle, du type 2, qui contient deux idéaux semi réduits doubles.

Les autres cycles, s'il en existe, ne peuvent contenir d'idéaux semi réduits remarquables et ne peuvent être que du type 4.

Comme pour un discriminant premier, si le cycle principal existe seul, *le corps est principal.*

Dans le cas contraire, l'*ordre du groupe des classes est impair* (un cycle principal et des couples de cycles). Si cet ordre est un nombre premier ou un produit de nombres premiers différents, *le groupe est cyclique*, mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

Pour les discriminants peu élevés, on constate aussi que, pour une très grande proportion d'entre eux, il n'existe pas de cycles de type 4, et que, par suite, le corps est principal. On indique ci-dessous la répartition de ces corps principaux, de discriminant inférieur à 1000, suivant le nombre d'idéaux dans le cycle unique. Les corps sont indiqués par les décompositions de leurs discriminants et dans l'ordre des trois cas:

2 idéaux dans le cycle: 3×7, 7×11, 3×31, 3×79, 19×23, 3×151; 4×3, 4×11, 4×23, 4×83, 4×227; 8×3, 8×19;
4 idéaux: 3×11, 3×23, 7×19, 3×47, 3×71, 7×59, 3×191, 3×239; 4×7, 4×47, 4×167; 8×7, 8×31;
6 idéaux: 3×19, 11×23, 3×103, 11×31, 3×127, 7×107, 3×271, 19×47; 4×19, 4×59, 4×107, 4×131; 8×11;
8 idéaux: 3×167, 7×83, 3×263, 11×79, 7×131, 23×43; 4×31, 4×71; 8×79, 8×103;
10 idéaux: 3×43, 7×23, 7×43, 11×47, 3×199, 3×223; 4×43, 4×67, 8×43, 8×59;
12 idéaux: 3×59, 11×19, 3×311, 7×139; 4×103, 4×127, 4×239; 8×23;
14 idéaux: 3×67, 7×71, 23×31; 4×179; 8×67;
16 idéaux: 7×31, 3×83, 7×47, 3×131, 3×179, 19×31; 4×191; 8×47;
18 idéaux: 3×139, 3×211, 11×67, 11×71; 4×139, 4×163;
20 idéaux: 4×151, 4×199; 22 idéaux: 3×163; 8×83;
24 idéaux: 3×251; 26 idéaux: 7×79; 4×211; 8×107;
32 idéaux: 3×227, 11×83; 34 idéaux: 11×59, 3×283, 3×307;
36 idéaux: 7×103; 42 idéaux: 7×127.

Les seuls corps, de discriminant inférieur à 1000, vérifiant les conditions précédentes et qui ne sont pas principaux, sont ceux de discriminant:

$$321 = 3\times 107,\quad 469 = 7\times 67,\quad 473 = 11\times 43,\quad 993 = 3\times 331;$$
$$316 = 4\times 79,\quad 892 = 4\times 223;\quad 568 = 8\times 71;$$

qui comprennent chacun un cycle principal et un couple de cycles conjugués formant par suite un *groupe d'ordre* 3, *cyclique*,

et le corps de discriminant $817 = 19\times 43$, qui comprend, en plus du cycle principal, deux couples de cycles conjugués, formant *un groupe d'ordre* 5, *cyclique.*

54. Corps à deux classes doubles.

Par un raisonnement analogue aux précédents (**52** et **53**), on peut caractériser les corps qui ont deux et seulement deux classes doubles d'idéaux.

Condition suffisante. — Un corps réel a deux, et seulement deux, classes doubles d'idéaux lorsque son discriminant a l'une des formes suivantes:

1. il est impair, nécessairement congru à $+1$, mod. 4, *égal à un produit* $u\times v$, *de deux nombres premiers, congrus chacun à* $+1$, mod. 4;

2. il est pair, *égal au produit par* 4, *du double* $2d'$, *d'un nombre premier* d', *congru à* $+1$, mod. 4;

[Dans ces deux cas les classes doubles sont caractérisées par *deux cycles*, soit du *type* 1 (d'un nombre impair de termes), soit *l'un du type* 2 *et l'autre du type* 3 (tous deux d'un nombre pair d'éléments).]

3. il est impair, *égal à un produit* $u\times v\times w$, *de trois nombres premiers, dont un est congru à* $+1$ *et chacun des deux autres à* -1, mod. 4;

4. il est pair, *égal au produit par* 4, *d'un produit* $d = u\times v$, ou du double $d = 2d'$, d'un produit $d' = u'\times v'$, *de deux nombres premiers, dont l'un est congru à* $+1$ *et l'autre à* -1, mod. 4;