Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMOTOPIE UND HOMOLOGIE
Autor: Eckmann, Beno
Kapitel: 4. Ausblicke.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37962

phismus $h : \pi_{m-1}(F) \to G$ unterworfen hat, nämlich dem durch Φ induzierten Homomorphismus von π_{m-1} der Faser von f in π_{m-1} der Faser von p (diese ist $\Omega K(G, m)$, also ist $\pi_{m-1}(\Omega K(G, m)) = G)$.

Die *Cohomologieklasse* dieses Cozyklus $\Phi\Psi = h_*(\eta)$ ist gemäss der obigen Vorschrift gegeben durch die „untere Komponente" von Φ, also durch $\varphi' \in H^m(B; G)$ und *somit von s unabhängig*. φ' ist übrigens nichts anderes als ein durch *Transgression* aus einem Cohomologieelement $\in H^{m-1}(F; G)$ der Faser gewonnenes Element. Man beachte, dass dieser Zusammenhang zwischen Hindernis und Transgression nicht nur für das "erste Hindernis", sondern für eine beliebige Schnittfläche gilt. Im Fall des *ersten Hindernisses*, d.h. wenn die Faser F (m-2)-zusammenhängend ist ($\pi_i(F) = 0$, $i \leqslant m - 2$), weiss man, dass eine Fundamentalklasse $\Phi \in H^m(f; \pi_{m-1}(F))$ existiert, derart dass der induzierte Homomorphismus h von $\pi_{m-1}(F)$ in $G = \pi_{m-1}(F)$ die Identität ist; somit ist dann der Cozyklus $\Phi\Psi = \eta$ gleich dem *ersten Hinderniscozyklus selbst*, und seine Cohomologieklasse $\in H^m(B; \pi_{m-1}(F))$ ist einfach gleich der Komponente φ' von Φ, unabhängig von der speziell gewählten (m—1)-Schnittfläche.

Damit wird auch eine Definition des ersten Hindernisses nahegelegt, die nicht auf der Polyeder-Eigenschaft von B beruht und das übliche schrittweise Erweiterungsverfahren nicht benützt: es ist gegeben durch die Komponente φ' einer Fundamentalklasse $\Phi \in H^m(f; \pi_{m-1}(F))$. Von dieser Hindernisklasse $\varphi' \in H^m(B; \pi_{m-1}(F))$ lässt sich im Falle $F = K(G, m-1)$ direkt nachweisen, dass sie die Faserungen $E \to B$ mit Faser $K(G, m-1)$ charakterisiert.

Auf den Fall höherer Hindernisse soll an anderer Stelle eingegangen werden.

4. Ausblicke.

Die homotopische Auffassung der Cohomologie, wie sie oben skizziert ist, lässt sich sehr weit fortführen (obwohl die explizite Berechnung in Spezialfällen sich stets auf simpliziale oder Zellenstrukturen stützt). In diesen Gedankenkreis gehört die Postnikovzerlegung eines Raumes (Charakterisierung des Homotopietypes durch die Homotopiegruppen und gewisse Cohomologieklassen) sowie diejenige einer Abbildung, vgl. [3]; ferner die Cohomologieoperationen, sowohl die primären wie die höhern. Ueberdies legt die Dualität Cohomologie-Homotopie, sei sie heuristischer oder strikter Art, analoge Bildungen für die Homotopiegruppen nahe: Homotopiegruppen mit Koeffizienten (vgl. [1]), Homotopiezerlegung eines einfach-zusammenhängenden Polyeders, oder einer Abbildung, vgl. [3]; Charakterisierung spezieller Cofaserungen durch eine Hindernisklasse, genau dual zu dem am Schluss von Abschnitt 3 beschriebenen Vorgehen, vgl. [2]. Weitere duale Beziehungen bestehen zwischen dem cup-Produkt in der Cohomologie und dem Whitehead-Produkt in der Homotopie. Auch zu numerischen Invarianten wie der „Lusternik-Schnirelman-Categorie" eines Raumes konnten duale Grössen definiert werden (P. J. Hilton, Berstein-Ganea), wobei jedoch offensichtlich die naive Dualität versagt; sie kann nur durch Zwischenschaltung geeigneter Funktoren, die von Räumen zu algebraischen Begriffen führen (z.B. Gruppen, semisimplizialen Gruppen usw.) oder umgekehrt, gerettet werden. Die Gründe hiezu liegen in allgemeinen kategorietheoretischen Gesetzmässigkeiten, die von P. J. Hilton und dem Verfasser ausführlich untersucht worden sind [7].

LITERATUR

[1] B. Eckmann et P. J. Hilton: Groupes d'homotopie et dualité. *C.R. Acad. Sc., Paris*, t. 246 (1958), pp. 2444, 2555, 2991.

[2] — — Transgression homotopique et cohomologique. *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 247 (1958), p. 620.

[3] — — On the homology and homotopy decomposition of continuous maps. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, USA, Vol. 45 (1959), p. 372.

[4] — — Homotopy Groups of Maps and Exact Sequences. *Comm. Math. Helv.*, 34 (1960), p. 272.

[5] P. J. Huber: Homotopy Theory in General Categories. *Math. Annalen* (1961) p. 361.

[6] P. J. Huber: Homotopical cohomology and Čech cohomology. *Math. Annalen* (1961) p. 73.

[7] B. Eckmann and P. J. Hilton: Group-like structures in general categories, I. *Math. Annalen* (1962) p. 227. II, III (to appear).

Eidg. Technische Hochschule
Zürich.