

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATIONS DES VARIÉTÉS A CONNEXION LINÉAIRE ET
DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES
Autor: Lichnerowicz, André
Kapitel: I. Le groupe de Kostant.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37948>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 19.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

consacrée à l'étude géométrique d'espaces homogènes particulièrement importants. Les différents résultats présentés sont dus principalement à Kobayashi, Kostant, Nomizu, Wang, Yano et à l'auteur de cette conférence.

I. LE GROUPE DE KOSTANT.

2. Transformations infinitésimales affines.

a) Soit V_m une variété différentiable¹⁾ de dimension m , munie d'une connexion linéaire. Cette connexion est définie par sa forme ω , 1-forme sur l'espace fibré principal $E(V_m)$ des repères de V_m et à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. A la 2-forme de torsion Σ de type vectoriel de la connexion correspond canoniquement une 1-forme $\lambda(\Sigma)$ de type adjointe à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe linéaire. Désignons par $\bar{\omega}$ la connexion associée à ω définie par²⁾:

$$\bar{\omega} = \omega + \lambda(\Sigma)$$

et par ∇ et $\bar{\nabla}$ les opérateurs de différentiation absolue par rapport aux connexions ω et $\bar{\omega}$. A tout champ de vecteurs X , nous faisons correspondre le champ de tenseurs A_X de type $(1, 1)$ défini par la 1-forme de type vectoriel $-\bar{\nabla} X$. En chaque point x de V_m , $A_X(x)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x à V_m . Le champ A_X intervient dans l'expression de l'opérateur de transformation infinitésimale $\mathcal{L}(X)$ en termes de dérivée covariante. En particulier, si t est un tenseur de type $(1, 1)$:

$$(2-1) \quad \mathcal{L}(X)t = i(X)\nabla t + [A_X, t]$$

où $i(X)$ est l'opérateur de produit intérieur par X sur une forme et où le crochet est entendu au sens du crochet des endomorphismes.

b) Un champ de vecteurs X définit une transformation infinitésimale (t.i.) affine si cette t.i. laisse ω invariante, c'est-à-dire si

$$(2-2) \quad \mathcal{L}(X)\omega = 0$$

¹⁾ Dans cette conférence, tous les éléments introduits sont supposés indéfiniment différentiables.

²⁾ Pour une connexion sans torsion, $\bar{\omega}$ coïncide avec ω .

où $\mathcal{L}(X)$ a été étendu à $E(V_m)$; (2-2) peut être traduite par:

$$(2-3) \quad i(Y) \nabla A_X = \Omega(X, Y)$$

où Ω est la forme de courbure de la connexion et Y un vecteur arbitraire. De (2-3) il résulte que deux t.i. affines pour lesquelles X et A_X ont mêmes valeurs en un point coïncident sur V_m . Ainsi les t.i. affines définissent par le crochet usuel $[X, Y] = \mathcal{L}(X)Y$, une algèbre de Lie *de dimension finie*.

c) Une *transformation affine* est une transformation μ de V_m laissant invariante la connexion ω . Si μ' est l'application linéaire tangente définie par μ et $\tau(l)$ le *transport* au sens de la connexion le long d'un chemin l de V_m joignant x à x' , on a alors l'égalité:

$$(2-4) \quad \mu' \circ \tau(l) = \tau(\mu l) \circ \mu'$$

entre applications linéaires de T_x sur $T_{\mu x'}$.

On sait que le groupe $A(V_m)$ de toutes les transformations affines de V_m admet une structure naturelle de *groupe de Lie* (Nomizu ou corollaire d'un théorème plus général d'Ehresmann). Nous désignons par $A^0(V_m)$ le plus grand sous-groupe connexe de $A(V_m)$. Si V_m est *complète* pour la connexion ω , toute t.i. affine définit un groupe à un paramètre de transformations affines globales de V_m .

3. Interprétation de A_X .

Etant donné un champ de vecteurs X , désignons par $x(t) = \exp(tX)x_0$ pour t suffisamment petit, la solution de $dx/dt = X(x)$ telle que $x(0) = x_0$. Pour $0 \leq t \leq u$ (u suffisamment petit), $x(t)$ engendre un chemin l_u issu de x_0 .

Pour X définissant une t.i. *affine*, A_X admet une interprétation géométrique simple: considérons les automorphismes de T_{x_0} définis, pour u variable, par $\exp(-uX)' \tau(l_u)$. Ces automorphismes appartiennent à un groupe à un paramètre d'automorphismes de T_{x_0} et l'on a:

$$(3-1) \quad \exp[u A_X(x_0)] = \exp(-uX)' \tau(l_u).$$

4. Le groupe de Kostant.

a) Soit X et Y deux t.i. affines. De l'invariance de $\bar{\omega}$ par Y résulte:

$$A_{[Y, X]} = \mathcal{L}(Y) A_X$$

De (2-1) et (2-3) il vient:

$$A_{[Y, X]} = i(Y) \nabla A_X + [A_Y, A_X] = \Omega(X, Y) + [A_Y, A_X].$$

On obtient ainsi la relation simple:

$$(4-1) \quad \Omega(X, Y) = [A_X, A_Y] - A_{[X, Y]};$$

b) Soit L une algèbre de Lie de t.i. affines de V_m . Pour $X \in L$, les endomorphismes $A_X(x)$ de T_x engendrent une algèbre de Lie $\underline{K}_x(L)$ d'endomorphismes qui est l'algèbre de Lie d'un groupe connexe $K_x(L)$ d'automorphismes de T_x ; $K_x(L)$ sera dit le *groupe de Kostant* en x de l'algèbre L ¹⁾. Il a été un peu généralisé par Wang.

Soit Ψ'_x l'algèbre d'*holonomie infinitésimale*: c'est l'algèbre engendrée, en tant qu'espace vectoriel, par les endomorphismes de T_x déduits des dérivées covariantes successives du tenseur de courbure. D'après (2-1), le groupe de Kostant est sous-groupe du normalisateur connexe $N^0(\Psi'_x)$ du groupe d'holonomie infinitésimale dans le groupe de tous les automorphismes de T_x .

Supposons l'algèbre L *transitive*: le sous-espace de T_x engendré par les $X(x)$ ($X \in L$) coïncide avec T_x . Dans ce cas Ψ'_x coïncide avec le *groupe d'holonomie connexe* Ψ_x^0 . De (4-1), il résulte que les éléments de l'algèbre d'holonomie engendrés par le tenseur de courbure lui-même sont dans $\underline{K}_x(L)$ et, par récurrence sur l'ordre des dérivations du tenseur de courbure, on déduit de (2-1) qu'il en est de même pour tous les éléments de l'algèbre d'holonomie. Ainsi si L est *transitive*:

$$(4-2) \quad \Psi_x^0 \subset K_x(L) \subset N^0(\Psi_x^0).$$

5. Espace homogène à connexion linéaire invariante.

Soit $V_m = G/H$ (G effectif) un espace homogène muni d'une connexion linéaire invariante. Dans ce cas le groupe linéaire d'iso-

¹⁾ Ce groupe a été introduit par Kostant [1] dans le cas des variétés riemanniennes et des algèbres d'isométries infinitésimales.

tropie $\tilde{H}$ est isomorphe à H . A chaque élément g de G correspond une transformation affine μ_g de V_m . Le groupe G définit sur V_m une algèbre transitive L de t.i. affines; nous désignons par $K_x(G)$ le groupe de Kostant correspondant à L :

$$(5-1) \quad \Psi_x^0 \subset K_x(G) \subset N^0(\Psi_x^0).$$

Si $X \in L$, μ'_g transforme le tenseur $A_X(x)$ en le tenseur $A_{\mu'_g X}(gx)$. Par suite, chaque élément g de G établit un isomorphisme de $K_x(G)$ sur $K_{gx}(G)$ (isomorphisme qui applique Ψ_x^0 sur Ψ_{gx}^0). En particulier

$$(5-2) \quad \tilde{H}_x \subset N[K_x(G)] \quad (\tilde{H}_x^0 \subset K_x(G))$$

où N désigne le normalisateur dans le groupe des automorphismes de T_x .

On peut obtenir pour $K_x(G)$ un résultat analogue en ce qui concerne le transport. En considérant, dans chaque classe d'homotopie de lacets en x , un lacet composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de G et en évaluant le transport le long de chacun de ces arcs au moyen de la formule (3-1), on établit d'abord, grâce à (3-1),

$$(5-3) \quad \Psi_x \subset N[K_x(G)].$$

On voit de même que le transport le long d'un chemin $l(x, x')$ composé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de sous-groupes à un paramètre de G établit un isomorphisme entre $K_x(G)$ et $K_{x'}(G)$. Il résulte de (5-3) que le transport le long d'un chemin arbitraire reliant x à x' établit un isomorphisme entre $K_x(G)$ et $K_{x'}(G)$.

Il existe, comme nous le verrons, des cas nombreux où:

$$\Psi_x^0 = K_x(G).$$

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que sur l'espace homogène $V_m = G/H$, la connexion linéaire invariante est à holonomie normale.

6. *Tenseurs invariants.*

Si un tenseur t est invariant par transport, $t(x)$ est invariant par le groupe d'holonomie Ψ_x . De la formule (3-1) et de l'étude précédente, il résulte :

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène $V_m = G/H$ (G effectif) à connexion linéaire invariante, si un tenseur t satisfait deux des trois conditions suivantes, il satisfait la troisième.*

- a) t est invariant par l'action de G ;
- b) t est invariant par transport;
- c) $t(x)$ est invariant par le groupe de Kostant $K_x(G)$ en un point x de V_m .

Au champ t on peut substituer un champ Q de sous-espaces vectoriels. Si la connexion est à *holonomie normale*, b entraîne c , donc a : Tout tenseur invariant par transport est invariant par G .

II. TRANSFORMATIONS AFFINES ET ISOMÉTRIES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

7. *Transformations affines et réductibilité.*

Soit V_m une variété *riemannienne* de tenseur métrique g , que nous considérons toujours comme munie de sa *connexion riemannienne*. Toute isométrie ou *similitude* ($\mu^* g = c^2 g$; $c = \text{const.}$) est une transformation affine pour cette connexion. Inversement, dans l'hypothèse où le groupe d'holonomie est *irréductible*, toute transformation affine reproduit la métrique à un facteur nécessairement constant près, et par suite est une *similitude*. En utilisant cette remarque, nous nous proposons d'étudier les rapports généraux entre transformations affines et isométries.

a) La variété V_m est dite réductible si son groupe d'holonomie connexe Ψ_x^0 est réductible dans le réel. S'il en est ainsi, l'espace vectoriel T_x peut être décomposé, d'une manière et d'une seule à l'ordre près, en somme directe de sous-espaces orthogonaux T_x^a ($a = 0, 1, \dots, k$), invariants par Ψ_x^0 , tels que Ψ_x^0 induise l'identité sur T_x^0 et des représentations irréductibles sur