SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

Autor(en): **Steinig, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39980

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

par J. STEINIG

1. INTRODUCTION

On sait que les hauteurs $(h) = (h_1, h_2, h_3)$ d'un triangle et les rayons $(r) = (r_1, r_2, r_3)$ de ses cercles exinscrits sont liés par la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \tag{1}$$

qui peut s'écrire aussi

$$M_{-1}(h) = M_{-1}(r).$$

$M_u(x)$ désigne ici la moyenne d'ordre u des nombres réels positifs $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie par

$$M_u(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^u\right)^{1/u} & pour\ u \neq 0 \\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} & pour\ u = 0\,; \end{cases}$$

c'est une fonction continue et croissante de u sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

M. A. Mąkowski a donné une généralisation de (1) en démontrant dans [1] les inégalités

$$\begin{cases} M_u(h) \leqq M_u(r) & pour\ u > -1 \\ M_u(h) \geqq M_u(r) & pour\ u < -1\,. \end{cases} \tag{2}$$

Nous nous proposons de démontrer ici quelques autres résultats du même genre à l'aide de l'inégalité de Karamata.

2. L'inégalité de Karamata

Rappelons brièvement en quoi consiste cette inégalité. Si les nombres réels $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x') = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ satisfont aux trois conditions

$$\text{(I)} \quad x_1 \geqq x_2 \geqq \dots \geqq x_n \ , \ x'_1 \geqq x'_2 \geqq \dots \geqq x'_n ,$$

$$\text{(II)} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_\nu \leqq x'_1 + x'_2 + \dots + x'_\nu \ (1 \leqq \nu < n) ,$$

$$\text{(III)} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n ,$$

nous dirons avec les auteurs de [2] que (x') majore (x), et écrirons $(x) \prec (x')$.

M. J. Karamata a démontré [3] que si $(x) \prec (x')$, alors

$$\phi(x_1) + \phi(x_2) + \dots + \phi(x_n) \leqq \phi(x'_1) + \phi(x'_2) + \dots + \phi(x'_n) \quad (3)$$

pour toute fonction ϕ continue et convexe dans un intervalle comprenant (x) et (x'). Si ϕ est deux fois dérivable et $\phi'' > 0$, il n'y a égalité dans (3) que lorsque $(x) \equiv (x')$. L'inégalité (3) est évidemment renversée si ϕ est concave, car $-\phi$ est alors convexe.

M. M. Petrović a montré dans [4] que si la fonction $f(x)$ possède au voisinage de $x = 0$ un développement en série de puissances $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, avec $a_k \geqq 0$ pour $k \geqq 2$, alors

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leqq f(x_1 + x_2 + x_3) + 2f(0) ,$$

et M. le Professeur Karamata nous a indiqué que c'est précisément la lecture de cet article qui lui donna l'idée de l'inégalité (3).

3. Quelques applications

Soit $A_1 A_2 A_3$ un triangle quelconque et a_i le côté opposé au sommet A_i, alors que m_i désigne la médiane passant par A_i et r_i le rayon du cercle exinscrit tangent à a_i.

Nous pouvons supposer que $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3$, et donc que

$$r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \quad \text{et} \quad m_1 \leqq m_2 \leqq m_3 .$$

Nous démontrerons d'abord l'existence d'un nombre s, $0 < s < 1$, tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} M_u(a) \leqq M_u(r) \ \textit{pour} \ u > s \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} M_u(a) \geqq M_u(r) \ \textit{pour} \ u < s . \end{cases} \tag{4}$$

En effet, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} M_u(a) - M_u(r)$ est une fonction continue de u, et M. F. Leuenberger a montré [5] qu'elle est positive pour $u = 0$ et négative pour $u = 1$. Il existe donc une valeur s de la variable, $0 < s < 1$, pour laquelle $\dfrac{\sqrt{3}}{2} M_s(a) - M_s(r) = 0$.

De plus, on peut montrer que

$$a_i = \frac{r_i (r_{i-1} + r_{i+1})}{\sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}}, \tag{5}$$

les indices étant pris mod 3; il s'ensuit facilement que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \leqq r_1 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} a_3 \geqq r_3 . \tag{6}$$

En raison de ces propriétés, et puisque $s > 0$, nous avons

$$a_1^s \geqq a_2^s \geqq a_3^s \ , \ r_1^s \geqq r_2^s \geqq r_3^s ,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s a_1^s \leqq r_1^s ,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s (a_1^s + a_2^s) \leqq r_1^s + r_2^s ,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s (a_1^s + a_2^s + a_3^s) = r_1^s + r_2^s + r_3^s .$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Karamata en choisissant pour ϕ les fonctions convexes définies par

$$\phi(x) = x^{u/s} \quad (x>0) \quad \textit{pour} \quad u < 0 \ \textit{ou} \ u > s,$$

$$\phi(x) = -x^{u/s} \quad (x>0) \quad \textit{pour} \quad 0 < u < s,$$

$$\phi(x) = -\log x \quad (x>0),$$

pour voir que (4) a lieu. Si $u \neq s$, il n'y a égalité que lorsque $\sqrt{3}\, a_i = 2r_i$ pour $i = 1, 2, 3$, c'est-à-dire lorsque le triangle est équilatéral.

Montrons maintenant en suivant le même raisonnement qu'il existe une valeur t, $0 < t < 1$, telle que

$$\begin{cases} M_u(m) \leqq M_u(r) \quad \textit{pour} \quad u > t \\ M_u(m) \geqq M_u(r) \quad \textit{pour} \quad u < t; \end{cases} \tag{7}$$

c'est évidemment une inégalité plus précise que celle de Mąkowski pour $u \geqq t$.

Les inégalités $M_0(m) \geqq M_0(r)$ et $M_1(m) \leqq M_1(r)$ sont démontrées dans [5]. Il ne reste donc plus à montrer que $m_1 \geqq r_3$ et $m_3 \leqq r_1$.

Pour prouver la première de ces inégalités, rappelons que

$$4m_i^2 = 2(a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2) - a_i^2, \tag{8}$$

d'où $\quad 4m_i^2 \geqq (a_{i-1} + a_{i+1})^2 - a_i^2,$

soit $\quad m_i \geqq \sqrt{r_{i-1}\, r_{i+1}},$

et en particulier $\quad m_1 \geqq \sqrt{r_2 r_3} \geqq r_3.$

D'autre part, on voit en appliquant les formules (5) et (8) que l'inégalité $m_3 \leqq r_1$ est équivalente à

$$2\left[r_2^2 (r_1 + r_3)^2 + r_1^2 (r_2 + r_3)^2\right] - r_3^2 (r_1 + r_2)^2 \leqq 4r_1^2 \cdot \sum_{i<j} r_i r_j,$$

ou encore à

$$r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2 + 4r_1^2 r_2^2 + 4r_1 r_2^2 r_3 \leqq 4r_1^2 (r_1 r_2 + r_1 r_3) + 2r_1 r_2 r_3^2,$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$4r_1 r_3 (r_1^2 - r_2^2) + (r_1 - r_2)\left[4r_1^2 r_2 - r_3^2 (r_1 - r_2)\right] \geqq 0. \tag{9}$$

Or, on a manifestement $r_1 r_2 \geqq r_3^2$ et $4r_1 > r_1 - r_2$, et le produit de ces deux inégalités positives donne $4r_1^2 r_2 > r_3^2 (r_1 - r_2)$. Puisqu'on a encore $r_1 \geqq r_2$, aucun des termes du côté gauche de (9) n'est négatif, ce qui démontre cette inégalité.

Nous avons donc

$$M_0(r) \leqq M_0(m) \quad \text{et} \quad M_1(r) \geqq M_1(m),$$
$$r_3 \leqq m_1 \quad \text{et} \quad r_1 \geqq m_3;$$

c'est dire qu'il existe un t[1], $0 < t < 1$, tel que $(m^t) \prec (r^t)$.

L'inégalité (7) se trouve ainsi démontrée, et il est facile de voir qu'il n'y a égalité que dans le cas d'un triangle équilatéral.

Pour conclure, remarquons qu'il ne peut exister d'inégalité générale entre $\frac{\sqrt{3}}{2} M_u(a)$ et $M_u(m)$; ceci est une conséquence immédiate d'un théorème d'Euler [6] qui affirme qu'on peut construire avec les médianes m_i du triangle $A_1 A_2 A_3$ un nouveau triangle dont les médianes sont alors $\frac{3}{4} a_i$. Par contre, on sait qu'il existe certaines égalités; on voit aisément avec (8) qu'on a toujours

$$\frac{\sqrt{3}}{2} M_2(a) = M_2(m) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} M_4(a) = M_4(m).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. MAKOWSKI, « Inequalities for a Triangle », *El. Math.* 16 (1961), 60-61.

[2] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA. « Inequalities », *Cambridge University Press* (second edition, 1959), aux pages 45 et 89.

[3] J. KARAMATA, « Sur une inégalité relative aux fonctions convexes », *Publ. math. Univ. Belgrade*, 1 (1932), 145-148.

[4] M. PETROVIĆ, « Sur quelques fonctions des côtés et des angles d'un triangle », *Enseignement math.* 18 (1916), 153-163.

[5] F. LEUENBERGER, « Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel », *El. Math.* 16 (1961), 127-129.

[6] Leonhardi EULERI, Opera Omnia, Series I, Vol. 4 (Commentationes Arithmeticae **3**), aux pages XXI et 298.

(Reçu le 30 juin 1964)

J. Steinig
5, rue Toeffer
Genève

[1] La valeur exacte de t, comme celle de s, dépendra du choix de a); par exemple, $s > \frac{1}{4}$ lorsque $(a) = (3, 4, 5)$, au lieu que $s < \frac{1}{4}$ si $(a) = (2, 24, 24)$.

vide-leer-empty