

# SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Autor(en): **Mari, V. / Vuilleumier, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39969>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

par V. MARIĆ et M. VUILLEUMIER

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y); \quad (1)$$

lorsque  $f$  est une fonction rationnelle en  $x$  et  $y$ , Hardy [1] a donné le comportement asymptotique des solutions définies dans un voisinage de l'infini. En outre, il a montré que toute solution, ainsi que toute fonction rationnelle d'une telle solution, est ou bien constante, ou bien strictement monotone à partir d'un  $x$ .

Or, en ne faisant que des hypothèses relatives au signe de  $f$ , on peut encore obtenir des résultats sur le comportement des solutions, à savoir qu'elles tendent vers une limite, finie ou infinie, ou même qu'elles sont *quasi-monotones*, c'est-à-dire que pour tout  $a$ , ou bien  $y(x) + a \geq 0$ , ou bien  $y(x) + a \leq 0$ , à partir d'un  $x$ . \*)

Ces résultats sont donnés par les deux théorèmes suivants:

**THÉORÈME 1.** *Si  $f(x, y)$  est continue pour  $x > x_0$  et  $y_1 < y < y_2$  et si quel que soit  $y$  fixe,  $f(x, y)$  est constamment  $\geq 0$  ou constamment  $\leq 0$  à partir d'un  $x$ , alors toute solution de (1) définie dans un voisinage de l'infini tend vers une limite, finie ou infinie.*

*Démonstration.* On suppose par l'absurde que  $y(x)$  est une solution de (1) telle que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} y(x) < \limsup_{x \rightarrow \infty} y(x).$$

---

\*) Cette définition correspond à celle qu'a donnée Hardy [2] pour les suites, à savoir, une suite est quasi-monotone si chaque terme n'est minoré (ou majoré) que par un nombre fini de termes.

Alors, quels que soient deux nombres  $l_1, l_2$  tels que

$$\liminf y(x) < l_1 < l_2 < \limsup y(x)$$

et quelque grand que soit  $x$ , il existe deux nombres  $\xi_1, \xi_2$ ,  $x < \xi_1 < \xi_2$ , tels que

$$l_1 \leq y(\xi_1) < y(\xi_2) \leq l_2,$$

(ou, si l'on veut, tels que  $l_1 \leq y(\xi_2) < y(\xi_1) \leq l_2$ ).

On peut donc construire un  $\xi$ , avec  $\xi_1 < \xi < \xi_2$ , tel que

$$y(\xi_1) < y(\xi) < y(\xi_2), \quad \text{et} \quad y'(\xi) > 0$$

$$(\text{resp. } y(\xi_1) > y(\xi) > y(\xi_2), \quad \text{et} \quad y'(\xi) < 0).$$

D'après la continuité de  $y'$ , on en déduit l'existence d'un intervalle entier  $[x_1, x_2]$  contenant  $\xi$  tel que pour tout  $x \in [x_1, x_2]$  on a  $y'(x) > 0$  (resp.  $< 0$ ) et tel que  $l_1 \leq y(x_1) < y(x_2) \leq l_2$  (resp.  $l_1 \leq y(x_2) < y(x_1) \leq l_2$ ).

On peut ainsi trouver une suite d'intervalles  $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ , avec  $x_i \rightarrow \infty$ , sur lesquels  $y'$  est alternativement  $> 0$  et  $< 0$ , et dont les images forment une suite d'intervalles fermés emboîtés. Si  $y_0$  désigne un élément commun à tous ces intervalles, il lui correspond une suite  $\{\xi_i\}$  telle que  $\xi_i \rightarrow \infty$ ,  $y(\xi_i) = y_0$  et  $y'(\xi_i)$  est alternativement  $> 0$  et  $< 0$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $f(x, y_0)$  est de signe constant à partir d'un  $x$ .

**THÉORÈME 2.** *Soit  $f(x, y)$  définie pour  $x > x_0$  et  $y_1 < y < y_2$ ; supposons qu'à tout  $y_0 \in (y_1, y_2)$  on puisse associer un ensemble ouvert  $\mathcal{D}$  du plan, contenant la droite  $y = y_0$  pour  $x$  assez grand, de telle sorte que  $f(x, y)$  soit constamment  $\geq 0$  ou constamment  $\leq 0$  sur l'un des deux ensembles*

$$\mathcal{D}^+ = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } y > y_0\}$$

ou

$$\mathcal{D}^- = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } y < y_0\}.$$

*Alors, toute solution de (1) définie dans un voisinage de l'infini est quasi-monotone.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe une solution  $y$  définie dans un voisinage de l'infini qui n'est pas quasi-monotone, c'est-à-dire qu'il existe un  $y_0 \in (y_1, y_2)$  et une suite  $\{x_i\}$ ,  $x_i \rightarrow \infty$ , tels que

$$y(x_{2i}) > y_0 \quad \text{et} \quad y(x_{2i+1}) < y_0.$$

Soit  $\rho_i$  la distance du segment  $[(x_i, y_0), (x_{i+1}, y_0)]$  au bord du domaine  $\mathcal{D}$ . Il existe alors un  $\xi_i$ ,  $x_i < \xi_i < x_{i+1}$  tel que  $y_0 < y(\xi_i) < y_0 + \rho_i$  (resp.  $y_0 - \rho_i < y(\xi_i) < y_0$ ) et  $y'(\xi_i) < 0$  si  $i$  est pair et  $y'(\xi_i) > 0$  si  $i$  est impair. Puisque  $\xi_i \rightarrow \infty$ , cela contredit l'hypothèse que  $f(x, y)$  est de signe constant dans  $\mathcal{D}^+$  (resp.  $\mathcal{D}^-$ ).

#### RÉFÉRENCES

- [1] HARDY, G. H. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order, *Proc. London Math. Soc.* (2) 10 (1912), pp. 451-468.
- [2] — The ordinal relations of the terms of a convergent sequence, *Proc. London Math. Soc.* (2) 8 (1909), p. 295.

(Reçu le 1<sup>er</sup> avril 1964)

V. Marić  
Institut de Mathématiques  
Université de Novi Sad (Yougoslavie)

M. Vuilleumier  
Institut de Mathématiques  
Université de Genève (Suisse)