Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Autor: Mari, V. / Vuilleumier, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39969

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

par V. MARIĆ et M. VUILLEUMIER

Soit l'équation differentielle

$$y' = f(x, y); \tag{1}$$

lorsque f est une fonction rationnelle en x et y, Hardy [1] a donné le comportement asymptotique des solutions définies dans un voisinage de l'infini. En outre, il a montré que toute solution, ainsi que toute fonction rationnelle d'une telle solution, est ou bien constante, ou bien strictement monotone à partir d'un x.

Or, en ne faisant que des hypothèses relatives au signe de f, on peut encore obtenir des résultats sur le comportement des solutions, à savoir qu'elles tendent vers une limite, finie ou infinie, ou même qu'elles sont *quasi-monotones*, c'est-à-dire que pour tout a, ou bien $y(x) + a \geqslant 0$, ou bien $y(x) + a \leqslant 0$, à partir d'un x. *)

Ces résultats sont donnés par les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Si* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *est continue pour* $\mathrm{x} > \mathrm{x}_0$ *et* $\mathrm{y}_1 < \mathrm{y} < \mathrm{y}_2$ *et si quel que soit* y *fixe*, $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *est constamment* $\geqslant 0$ *ou constamment* $\leqslant 0$ *à partir d'un* x, *alors toute solution de* (1) *définie dans un voisinage de l'infini tend vers une limite, finie ou infinie.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que $y(x)$ est une solution de (1) telle que

$$\liminf_{x \to \infty} y(x) < \limsup_{x \to \infty} y(x) .$$

*) Cette définition correspond à celle qu'a donnée Hardy [2] pour les suites, à savoir, une suite est quasi-monotone si chaque terme n'est minoré (ou majoré) que par un nombre fini de termes.

Alors, quels que soient deux nombres l_1, l_2 tels que

$$\liminf y(x) < l_1 < l_2 < \limsup y(x)$$

et quelque grand que soit x, il existe deux nombres ξ_1, ξ_2, $x < \xi_1 < \xi_2$, tels que

$$l_1 \leqslant y(\xi_1) < y(\xi_2) \leqslant l_2 ,$$

(ou, si l'on veut, tels que $l_1 \leqslant y(\xi_2) < y(\xi_1) \leqslant l_2)$.

On peut donc construire un ξ, avec $\xi_1 < \xi < \xi_2$, tel que

$$y(\xi_1) < y(\xi) < y(\xi_2), \quad \text{et} \quad y'(\xi) > 0$$

$$\bigl(\text{resp. } y(\xi_1) > y(\xi) > y(\xi_2), \quad \text{et} \quad y'(\xi) < 0\bigr).$$

D'après la continuité de y', on en déduit l'existence d'un intervalle entier $[x_1, x_2]$ contenant ξ tel que pour tout $x \in [x_1, x_2]$ on a $y'(x) > 0$ (resp. < 0) et tel que $l_1 \leqslant y(x_1) < y(x_2) \leqslant l_2$ (resp. $l_1 \leqslant y(x_2) < y(x_1) \leqslant l_2$).

On peut ainsi trouver une suite d'intervalles $[x_{2i-1}, x_{2i}]$, avec $x_i \to \infty$, sur lesquels y' est alternativement > 0 et < 0, et dont les images forment une suite d'intervalles fermés emboîtés. Si y_0 désigne un élément commun à tous ces intervalles, il lui correspond une suite $\{\xi_i\}$ telle que $\xi_i \to \infty$, $y(\xi_i) = y_0$ et $y'(\xi_i)$ est alternativement > 0 et < 0, ce qui contredit l'hypothèse que $f(x, y_0)$ est de signe constant à partir d'un x.

THÉORÈME 2. *Soit* $f(x, y)$ *définie pour* $x > x_0$ *et* $y_1 < y < y_2$; *supposons qu'à tout* $y_0 \in (y_1, y_2)$ *on puisse associer un ensemble ouvert* $\mathscr{D}$ *du plan, contenant la droite* $y = y_0$ *pour* x *assez grand, de telle sorte que* $f(x, y)$ *soit constamment* $\geqslant 0$ *ou constamment* $\leqslant 0$ *sur l'un des deux ensembles*

$$\mathscr{D}^+ = \{(x, y) : (x, y) \in \mathscr{D} \text{ et } y > y_0\}$$

ou

$$\mathscr{D}^- = \{(x, y) : (x, y) \in \mathscr{D} \text{ et } y < y_0\}.$$

Alors, toute solution de (1) *définie dans un voisinage de l'infini est quasi-monotone.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution y définie dans un voisinage de l'infini qui n'est pas quasi-monotone, c'est-à-dire qu'il existe un $y_0 \in (y_1, y_2)$ et une suite $\{x_i\}$, $x_i \to \infty$, tels que

$$y(x_{2i}) > y_0 \quad \text{et} \quad y(x_{2i+1}) < y_0 .$$

Soit ρ_i la distance du segment $[(x_i, y_0), (x_{i+1}, y_0)]$ au bord du domaine $\mathscr{D}$. Il existe alors un ξ_i, $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ tel que $y_0 < y(\xi_i) < y_0 + \rho_i$ (resp. $y_0 - \rho_i < y(\xi_i) < y_0$) et $y'(\xi_i) < 0$ si i est pair et $y'(\xi_i) > 0$ si i est impair. Puisque $\xi_i \to \infty$, cela contredit l'hypothèse que $f(x, y)$ est de signe constant dans $\mathscr{D}^+$ (resp. $\mathscr{D}^-$).

RÉFÉRENCES

[1] Hardy, G. H. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebriac differential equation of the first order, *Proc. London Math. Soc.* (2) *10* (1912), pp. 451-468.

[2] —— The ordinal relations of the terms of a convergent sequence, *Proc. London Math. Soc.* (2) *8* (1909), p. 295.

(Reçu le 1er avril 1964)

V. Marić
Institut de Mathématiques
Université de Novi Sad (Yougoslavie)

M. Vuilleumier
Institut de Mathématiques
Université de Genève (Suisse)