

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE  
**Autor:** Mari, V. / Vuilleumier, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39969>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

par V. MARIĆ et M. VUILLEUMIER

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y); \quad (1)$$

lorsque  $f$  est une fonction rationnelle en  $x$  et  $y$ , Hardy [1] a donné le comportement asymptotique des solutions définies dans un voisinage de l'infini. En outre, il a montré que toute solution, ainsi que toute fonction rationnelle d'une telle solution, est ou bien constante, ou bien strictement monotone à partir d'un  $x$ .

Or, en ne faisant que des hypothèses relatives au signe de  $f$ , on peut encore obtenir des résultats sur le comportement des solutions, à savoir qu'elles tendent vers une limite, finie ou infinie, ou même qu'elles sont *quasi-monotones*, c'est-à-dire que pour tout  $a$ , ou bien  $y(x) + a \geq 0$ , ou bien  $y(x) + a \leq 0$ , à partir d'un  $x$ . \*)

Ces résultats sont donnés par les deux théorèmes suivants:

**THÉORÈME 1.** *Si  $f(x, y)$  est continue pour  $x > x_0$  et  $y_1 < y < y_2$  et si quel que soit  $y$  fixe,  $f(x, y)$  est constamment  $\geq 0$  ou constamment  $\leq 0$  à partir d'un  $x$ , alors toute solution de (1) définie dans un voisinage de l'infini tend vers une limite, finie ou infinie.*

*Démonstration.* On suppose par l'absurde que  $y(x)$  est une solution de (1) telle que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} y(x) < \limsup_{x \rightarrow \infty} y(x).$$

---

\*) Cette définition correspond à celle qu'a donnée Hardy [2] pour les suites, à savoir, une suite est quasi-monotone si chaque terme n'est minoré (ou majoré) que par un nombre fini de termes.

Alors, quels que soient deux nombres  $l_1, l_2$  tels que

$$\liminf y(x) < l_1 < l_2 < \limsup y(x)$$

et quelque grand que soit  $x$ , il existe deux nombres  $\xi_1, \xi_2$ ,  $x < \xi_1 < \xi_2$ , tels que

$$l_1 \leq y(\xi_1) < y(\xi_2) \leq l_2,$$

(ou, si l'on veut, tels que  $l_1 \leq y(\xi_2) < y(\xi_1) \leq l_2$ ).

On peut donc construire un  $\xi$ , avec  $\xi_1 < \xi < \xi_2$ , tel que

$$y(\xi_1) < y(\xi) < y(\xi_2), \quad \text{et} \quad y'(\xi) > 0$$

$$\text{(resp. } y(\xi_1) > y(\xi) > y(\xi_2), \quad \text{et} \quad y'(\xi) < 0).$$

D'après la continuité de  $y'$ , on en déduit l'existence d'un intervalle entier  $[x_1, x_2]$  contenant  $\xi$  tel que pour tout  $x \in [x_1, x_2]$  on a  $y'(x) > 0$  (resp.  $< 0$ ) et tel que  $l_1 \leq y(x_1) < y(x_2) \leq l_2$  (resp.  $l_1 \leq y(x_2) < y(x_1) \leq l_2$ ).

On peut ainsi trouver une suite d'intervalles  $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ , avec  $x_i \rightarrow \infty$ , sur lesquels  $y'$  est alternativement  $> 0$  et  $< 0$ , et dont les images forment une suite d'intervalles fermés emboîtés. Si  $y_0$  désigne un élément commun à tous ces intervalles, il lui correspond une suite  $\{\xi_i\}$  telle que  $\xi_i \rightarrow \infty$ ,  $y(\xi_i) = y_0$  et  $y'(\xi_i)$  est alternativement  $> 0$  et  $< 0$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $f(x, y_0)$  est de signe constant à partir d'un  $x$ .

**THÉORÈME 2.** *Soit  $f(x, y)$  définie pour  $x > x_0$  et  $y_1 < y < y_2$ ; supposons qu'à tout  $y_0 \in (y_1, y_2)$  on puisse associer un ensemble ouvert  $\mathcal{D}$  du plan, contenant la droite  $y = y_0$  pour  $x$  assez grand, de telle sorte que  $f(x, y)$  soit constamment  $\geq 0$  ou constamment  $\leq 0$  sur l'un des deux ensembles*

$$\mathcal{D}^+ = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } y > y_0\}$$

ou

$$\mathcal{D}^- = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } y < y_0\}.$$

Alors, toute solution de (1) définie dans un voisinage de l'infini est quasi-monotone.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe une solution  $y$  définie dans un voisinage de l'infini qui n'est pas quasi-monotone, c'est-à-dire qu'il existe un  $y_0 \in (y_1, y_2)$  et une suite  $\{x_i\}$ ,  $x_i \rightarrow \infty$ , tels que

$$y(x_{2i}) > y_0 \quad \text{et} \quad y(x_{2i+1}) < y_0.$$

Soit  $\rho_i$  la distance du segment  $[(x_i, y_0), (x_{i+1}, y_0)]$  au bord du domaine  $\mathcal{D}$ . Il existe alors un  $\xi_i$ ,  $x_i < \xi_i < x_{i+1}$  tel que  $y_0 < y(\xi_i) < y_0 + \rho_i$  (resp.  $y_0 - \rho_i < y(\xi_i) < y_0$ ) et  $y'(\xi_i) < 0$  si  $i$  est pair et  $y'(\xi_i) > 0$  si  $i$  est impair. Puisque  $\xi_i \rightarrow \infty$ , cela contredit l'hypothèse que  $f(x, y)$  est de signe constant dans  $\mathcal{D}^+$  (resp.  $\mathcal{D}^-$ ).

#### RÉFÉRENCES

- [1] HARDY, G. H. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equation of the first order, *Proc. London Math. Soc.* (2) 10 (1912), pp. 451-468.
- [2] — The ordinal relations of the terms of a convergent sequence, *Proc. London Math. Soc.* (2) 8 (1909), p. 295.

(Reçu le 1<sup>er</sup> avril 1964)

V. Marić  
Institut de Mathématiques  
Université de Novi Sad (Yougoslavie)

M. Vuilleumier  
Institut de Mathématiques  
Université de Genève (Suisse)