III. Une famille de pyramides

III. *Une famille de pyramides*

Soit (P) une pyramide dont le pied de la hauteur entière c se trouve dans la base fermée convexe, qui est située dans le plan des axes OX, OY et a pour hauteurs dans la direction de ces axes a et b. On suppose $12c \geqq b \geqq a$.

Coupons (P) par le plan $Z = c - n$. Soient j_n le nombre de points entiers de la section fermée et s_n, l_n sa surface et son périmètre. On sait (voir l'article mentionné au début) que

$$j_n < s_n + \frac{l_n}{2} + 1 .$$

Par suite

$$j = 1 + \sum_1^{n=c} j_n < \sum_1^c s_n + \frac{1}{2} \sum_1^c l_n + c + 1 . \tag{4}$$

Comme $s_n = n^2 \dfrac{s_c}{c^2}$,

$$\sum_1^c s_n = \frac{c(c+1)(2c+1)}{6} \frac{s_c}{c^2} = \frac{s_c}{6c}(2c^2 + 3c + 1) = V + \frac{s_c}{2} + \frac{s_c}{6c} .$$

D'autre part, $l_n = \dfrac{n}{c} l_c$ donne

$$\sum_1^c \frac{cl_c}{2} + \frac{l_c}{2} < S' + \frac{l_c}{2} ,$$

où S' désigne la surface latérale de la pyramide. De (4) on déduit alors

$$j < V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1 + \left(\frac{s_c}{6c} + \frac{l_c}{4} - a - b \right) .$$

Il reste à montrer que l'expression entre parenthèses est négative ou nulle. Comme

$$s_c \leqq \frac{ab}{2} \quad \text{el} \quad l_c \leqq 2(a+b) ,$$

il suffit que

$$\frac{ab}{12c} \leqq \frac{a+b}{2},$$

qui est vérifiée car $12c \geqq b$ et $a+b \geqq 2a$.

Remarque. — *L'inégalité (1) est donc en particulier vérifiée par tout tétraèdre entier* O (o, o, o) A (a, o, o) B (o, b, o) C (o, o, c).

(reçu le 30 janvier 1964)

E. Ehrhart
11, rue de Bruges
Strasbourg