

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG
Autor: Domiaty, R. Z.
Kapitel: 2. Ein Hilfssatz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40727>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

2. EIN HILFSSATZ

Ein wesentliche Rolle wird die folgende Aussage spielen:

HILFSSATZ 1. *Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann eine Lösung von (2), wenn für jedes $x_0 \in (0,1)$ gilt:*

1. *Für jede Folge (x_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ist*

$$\liminf f(x_n) \geq f(x_0).$$

2. *Für jedes $a \in [f(x_0), +\infty]$ gibt es eine Folge (y_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a$.*

Beweis. a) Wenn $f(x)$ eine Lösung von (2) ist, folgen die beiden Aussagen unseres Hilfssatzes unmittelbar aus der Bedeutung von $L_f(x_0)$ in (1).

b) Jetzt sei $f(x)$ eine Funktion, die die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. x_0 sei ein beliebiger Punkt aus $(0,1)$. Wir zeigen, dass $L_f(x_0) = [f(x_0), +\infty]$ ist. Wegen 1. gilt

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0, x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \subseteq [f(x_0), +\infty],$$

und wegen 2. auch

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0, x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \supseteq [f(x_0), +\infty].$$

Daraus folgt unsere Behauptung.

3. EINE DARSTELLUNG REELLER ZAHLEN AUS $(0,1)$ DURCH GEWISSE FOLGEN

Um eine nichttriviale Lösung von (2) zu konstruieren, benötigen wir eine spezielle Darstellung der reellen Zahlen aus $(0,1)$, die von den üblichen Darstellungen abweicht. Bekanntlich kann man die Zahlen aus $(0,1)$ eineindeutig durch nicht-abbrechende Dualbrüche darstellen. Wenn also r eine beliebige reelle Zahl aus $(0,1)$ ist, gilt