

6. Weitere Folgerungen

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^{n-1} * d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1} * d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} * d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + c - a,
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c.$$

Damit ist auch (A_3) bewiesen.

(A_1) , (A_2) und (A_3) ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

6. WEITERE FOLGERUNGEN

Es sei E die Menge aller $x \in (0,1)$, für die $z(x) < \infty$ ist und F die Menge aller $x \in (0,1)$, für die $z(x) = \infty$ ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad \text{und} \quad E \cup F = (0,1).$$

Die Lage von E und F in $(0,1)$ beschreibt der folgende

SATZ 2. *Jeder Punkt $x \in (0,1)$ ist ein Kondensationspunkt der Menge E und auch der Menge F . (Genauer: In jeder Umgebung von x kann man eine Teilmenge von F bzw. G angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit $(0,1)$ in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in $(0,1)$ dicht liegen.

Beweisskizze. Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten x_1 und x_2 ($x_1 < x_2$) aus $(0,1)$ eine konti-

numismmächtige Teilmenge $E^* \subseteq E$ und eine kontinuumsmächtige Teilmenge $F^* \subseteq F$ existieren, die in (x_1, x_2) liegen. Es sei

$$x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), \quad x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}), \quad i = i(x_1, x_2) \text{ und } d_{1,i} > d_{2,i}.$$

Unter (p_k) wollen wir im weiteren eine unendliche Folge verstehen, die aus der Folge (2^k) durch eine beliebige Umordnung entsteht. P sei die Menge aller Folgen (p_k) . P besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, denn P kann als die Menge aller Anordnungen der abzählbar-unendlichen Menge $2^1, 2^2, \dots$ aufgefasst werden, und diese ist von der Mächtigkeit des Kontinuums; vgl. [3], S. 67.

Es sei E^* die Menge aller $y \in (0,1)$, wobei

$$y \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(p_k) \in P$ und

$$d_m = \begin{cases} d_{2,m} & \text{für } m \leq i \\ d_{2,i+1} + 1 & \text{für } m = i + 1 \\ p_k & \text{für } m = i + 1 + k. \end{cases}$$

gilt. Diese Menge E^* ist von der Mächtigkeit des Kontinuums, denn man kann jedem $y \in E^*$ genau eine Anordnung $(p_n) \in P$ zuordnen. Nach der Konstruktionsvorschrift ist ferner für jedes $y \in E^*$

$$i(y, x_1) = i, \quad i(y, x_2) = i + 1,$$

$$d_{1,i} > d_i, \quad d_{i+1} > d_{2,i+1}.$$

Also ist

$$x_1 < y < x_2 \quad y \in E^*.$$

Da aber auch

$$\begin{aligned} z(y) &= \sum_{m=1}^i * d_m^{-1} + d_{i+1}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^i * d_{2,m}^{-1} + \frac{1}{d_{2,i+1} + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty \end{aligned}$$

gilt, ist somit die Existenz von E^* bewiesen. Der Existenz-

beweis von F^* verläuft analog, wobei nur anstelle der Folge (2^k) die Folge (k) zu setzen ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Bezeichnet man mit $A(a)$, $0 < a < \infty$, die Menge aller $x \in (0,1)$, für welche $z(x) = a$ ist, so kann man auch den folgenden Satz beweisen.

SATZ 3. 1. $A(a)$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

2. $A(a)$ ist nirgends dicht in $(0,1)$.

Beweisskizze. Zu Punkt 1. Jede positive reelle Zahl a kann in der Form

$$a = r_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-r_j}$$

dargestellt werden, wobei r_0 eine nicht-negative ganze Zahl ist und r_j natürliche Zahlen sind, für die $r_j < r_{j+1}$ gilt ($j = 1, 2, \dots$). Es sei Q die Menge aller Folgen (q_s) , wobei (q_s) Folgen sind, die aus der Folge (2^r) durch beliebige Umordnungen hervorgehen. M sei die Menge aller $x \in (0,1)$, für die

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(q_s) \in Q$ und

$$d_m = \begin{cases} q_s & \text{für } m = 2t - 1 \\ 1 & \text{für } m = 2t \text{ und } t \leq n_0 \\ 0 & \text{für } m = 2t \text{ und } t > n_0 \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots$$

gilt. M besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, und für jedes $x \in M$ ist

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} * d_m^{-1} = n_0 + \sum_{s=1}^{\infty} q_s = a.$$

Es ist aber $(0,1) \supseteq A(a) \supseteq M$, und somit besitzt auch $A(a)$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Zu Punkt 2. Man zeigt zunächst (ähnlich wie beim Beweis zu Hilfssatz 4), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gleichwertig mit $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ ist, wenn man folgendes voraussetzt:

$$x_0 \leftrightarrow (d_m), \quad x_n \leftrightarrow (d_{m,n}), \quad x_n \neq x_0, \quad i_n = i(x_n, x_0) \text{ und } (d_m)$$

enthält unendlich viele positive Glieder. Damit beweist man, dass aus

$$z(x_0) = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

die Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = \infty$$

folgt. Den Beweis, dass $A(a)$ nirgends dicht in $(0,1)$ ist, führt man dann indirekt. Aus der gegenteiligen Annahme folgt, dass eine Umgebung $U_0 \subseteq (0,1)$ existiert, in der $A(a)$ dicht liegt. Da nach Satz 2 die Menge F in $(0,1)$ dicht liegt, liegt F auch U_0 dicht. Nun sei $y \in U_0 \cap F$. Es ist dann

$$z(y) = \infty .$$

Weil $A(a)$ in U_0 dicht, liegt muss es eine Folge $(y_n) \subset A(a)$ geben, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ist. Nach dem obigen muss dann einerseits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(y_n) = \infty$$

sein. Da aber andererseits für alle n stets $z(y_n) = a$ ist, gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(y_n) = a .$$

Das stellt einen Widerspruch gegen unsere Annahme dar. Somit ist diese Annahme falsch und damit unser Satz bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HAHN, H. *Reelle Funktionen*, Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.
- [2] ALEXANDROFF, P. S. *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956
- [3] KAMKE, E. *Mengenlehre*, Sammlung Göschen Bd. 999/999a. Verlag Walter de Gruyter, Berlin 1955

(Reçu le 10 avril 1965)

Dr. R. Z. Domiaty
Technische Hochschule
Graz