6. Weitere Folgerungen

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

$$= \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*}\, d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty}{}^{*}\, d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*}\, d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*}\, d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*}\, d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*}\, d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*}\, d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = c\,.$$

Damit ist auch (A_3) bewiesen.

(A_1), (A_2) und (A_3) ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

6. Weitere Folgerungen

Es sei E die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) < \infty$ ist und F die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) = \infty$ ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad \textit{und} \quad E \cup F = (0,1)\,.$$

Die Lage von E und F in $(0,1)$ beschreibt der folgende

Satz 2. *Jeder Punkt $x \varepsilon (0,1)$ ist ein Kondensationspunkt der Menge E und auch der Menge F. (Genauer: In jeder Umgebung von x kann man eine Teilmenge von F bzw. G angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit $(0,1)$ in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in $(0,1)$ dicht liegen.

Beweisskizze. Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$ aus $(0,1)$ eine kontinuumsmächtige Teilmenge $E^* \subseteq E$ und eine kontinuumsmächtige Teilmenge $F^* \subseteq F$ existieren, die in (x_1, x_2) liegen. Es sei

$$x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}),\ x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}),\ i = i(x_1, x_2) \text{ und } d_{1,i} > d_{2,i}\,.$$

Unter (p_k) wollen wir im weiteren eine unendliche Folge verstehen, die aus der Folge (2^k) durch eine beliebige Umordnung entsteht. P sei die Menge aller Folgen (p_k). P besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, denn P kann als die Menge aller Anordnungen der abzählbar-unendlichen Menge 2^1, $2^2, \ldots$ aufgefasst werden, und diese ist von der Mächtigkeit des Kontinuums; vgl. [3], S. 67.

Es sei E^* die Menge aller $y \varepsilon (0,1)$, wobei

$$y \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(p_k) \varepsilon P$ und

$$d_m = \begin{cases} d_{2,m} & \text{für } m \leqq i \\ d_{2,i+1} + 1 & \text{für } m = i+1 \\ p_k & \text{für } m = i+1+k\,. \end{cases}$$

gilt. Diese Menge E^* ist von der Mächtigkeit des Kontinuums, denn man kann jedem $y \varepsilon E^*$ genau eine Anordnung $(p_n) \varepsilon P$ zuordnen. Nach der Konstruktionsvorschrift ist ferner für jedes $y \varepsilon E^*$

$$i(y, x_1) = i\,, \qquad i(y, x_2) = i + 1,$$

$$d_{1,i} > d_i\,, \qquad d_{i+1} > d_{2,i+1}\,.$$

Also ist

$$x_1 < y < x_2 \qquad y \varepsilon E^*\,.$$

Da aber auch

$$z(y) = \sum_{m=1}^{i}{}^{*} d_m^{-1} + d_{i+1}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1}$$

$$= \sum_{m=1}^{i}{}^{*} d_{2,m}^{-1} + \frac{1}{d_{2,i+1} + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

gilt, ist somit die Existenz von E^* bewiesen. Der Existenz-beweis von F^* verläuft analog, wobei nur anstelle der Folge (2^k) die Folge (k) zu setzen ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Bezeichnet man mit $A(a)$, $0 < a < \infty$, die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für welche $z(x) = a$ ist, so kann man auch den folgenden Satz beweisen.

Satz 3. 1. *$A(a)$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

2. *$A(a)$ ist nirgends dicht in* $(0,1)$.

Beweisskizze. Zu Punkt 1. Jede positive reelle Zahl a kann in der Form

$$a = r_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-r_j}$$

dargestellt werden, wobei r_0 eine nicht-negative ganze Zahl ist und r_j natürliche Zahlen sind, für die $r_j < r_{j+1}$ gilt ($j = 1, 2, \ldots$). Es sei Q die Menge aller Folgen (q_s), wobei (q_s) Folgen sind, die aus der Folge (2^{r_s}) durch beliebige Umordnungen hervorgehen. M sei die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

$$\text{mit} \qquad (q_s) \, \varepsilon \, Q \quad \text{und}$$

$$d_m = \begin{cases} q_s & \text{für } m = 2t-1 \\ 1 & \text{für } m = 2t \text{ und } t \leqq n_0 \\ 0 & \text{für } m = 2t \text{ und } t > n_0 \end{cases} \qquad t = 1, 2, \ldots$$

gilt. M besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, und für jedes $x \varepsilon M$ ist

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} = n_0 + \sum_{s=1}^{\infty} q_s = a\,.$$

Es ist aber $(0,1) \supseteqq A(a) \supseteqq M$, und somit besitzt auch $A(a)$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Zu Punkt 2. Man zeigt zunächst (ähnlich wie beim Beweis zu Hilfssatz 4), dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gleichwertig mit $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$ ist, wenn man folgendes voraussetzt:

$$x_0 \leftrightarrow (d_m),\ x_n \leftrightarrow (d_{m,n}),\ x_n \neq x_0,\ i_n = i(x_n, x_0) \text{ und } (d_m)$$

enthält unendlich viele positive Glieder. Damit beweist man, dass aus

$$z(x_0) = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

die Aussage

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = \infty$$

folgt. Den Beweis, dass $A(a)$ nirgends dicht in (0,1) ist, führt man dann indirekt. Aus der gegenteiligen Annahme folgt, dass eine Umgebung $U_0 \subseteq (0,1)$ existiert, in der $A(a)$ dicht liegt. Da nach Satz 2 die Menge F in (0,1) dicht liegt, liegt F auch U_0 dicht. Nun sei $y \varepsilon U_0 \cap F$. Es ist dann

$$z(y) = \infty .$$

Weil $A(a)$ in U_0 dicht, liegt muss es eine Folge $(y_n) \subset A(a)$ geben, für die $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ ist. Nach dem obigen muss dann einerseits

$$\lim_{n\to\infty} z(y_n) = \infty$$

sein. Da aber anderseits für alle n stets $z(y_n) = a$ ist, gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} z(y_n) = a .$$

Das stellt einen Widerspruch gegen unsere Annahme dar. Somit ist diese Annahme falsch und damit unser Satz bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] HAHN, H. *Reelle Funktionen*, Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.

[2] ALEXANDROFF, P. S. *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

[3] KAMKE, E. *Mengenlehre*, Sammlung Göschen Bd. 999/999*a*. Verlag Walter de Gruyter, Berlin 1955

(Reçu le 10 avril 1965)

Dr. R. Z. Domiaty
Technische Hochschule
Graz