A. Introduction

INDEX ASSOCIÉ A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE, PÉRIODIQUE, DU SECOND ORDRE

par Bruno V. SCHMITT

A. INTRODUCTION

Nous reprenons ici, sous le nom d'index, une notion qui a été introduite d'une autre manière, sous le nom de « rotation number », par H. Seifert [1].

Etant donné un système différentiel d'ordre 2, à coefficients périodiques de période p, de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

à tout point x^0 du plan, nous associons un index $i(x^0) \in \mathbf{Z}$ qui a les propriétés suivantes:

1. L'index $i(x^0)$ est défini si et seulement s'il ne passe pas de solution de période p par le point x^0.

2. Si en x^0 et en y^0 distincts, les index sont différents, alors sur tout chemin continu joignant x^0 à y^0, il existe un point z^0 par lequel passe au moins une solution de période p.

Dans cet article nous limitons notre étude aux systèmes différentiels périodiques linéaires. Les résultats peuvent être résumés ainsi: soit

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x \tag{2}$$

le système différentiel linéaire, réel, d'ordre 2, de période p. Soit $x(t, t_0, x^0)$ la trajectoire de (2) telle que $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$. Soit $\mathscr{C}$ l'application linéaire, du plan dans le plan, de matrice $C(0)$, (C. II 1°), définie par $\mathscr{C}(x^o) = x(p, 0, x^0)$. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $\mathscr{C}$.

1° si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) \neq 0$, la seule trajectoire de période p est $x(t) = 0$, l'index du système (2) est défini en tout point x^0 distinct de 0, et il est indépendant de ce point. L'index est alors un nombre ne dépendant que du système (2).

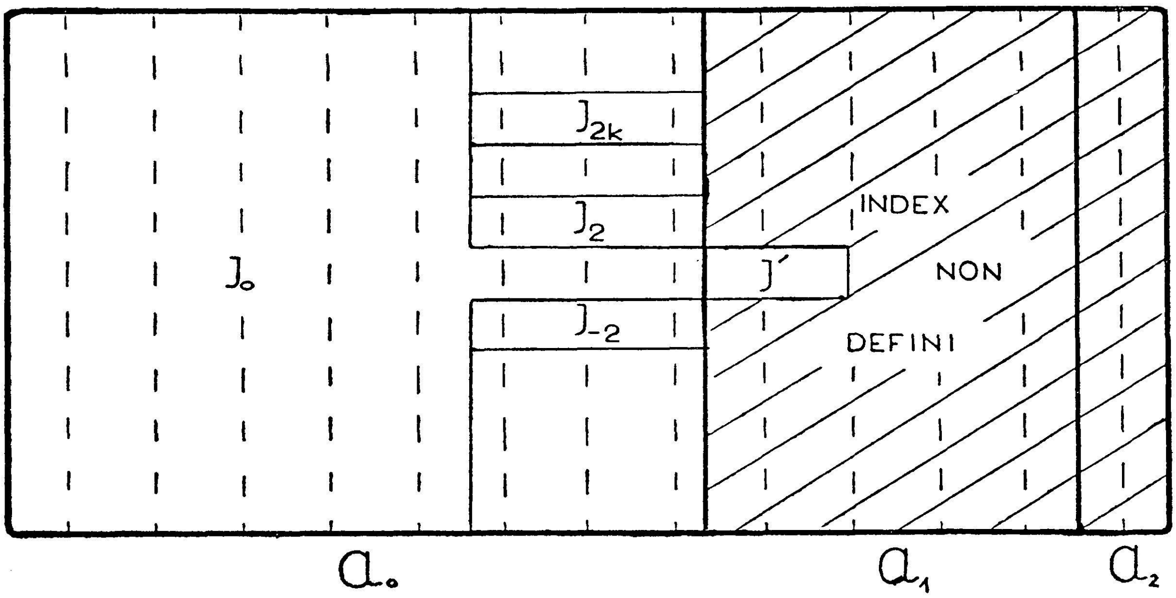
a) si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$ l'index du système est nul (C. III 2°)

b) si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0$ l'index du système est $2k$ (C. III 8°) où $k \in \mathbf{Z}$ est attaché à la classe d'homotopie (C. III 7°) du système (2).

2° si $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 0$, et si en x^0 l'index est défini, cet index est nul (III 2°) (ensemble J′ du tableau ci-dessous).

On pourra remarquer que l'index d'un système linéaire, en un point x^0 où il est défini, est dans tous les cas pair.

Ces résultats ont été détaillés dans le tableau ci-dèssous: il représente l'ensemble $\mathscr{A}$ des systèmes différentiels périodiques linéaires, d'ordre 2, décomposé en les sous-ensembles $\mathscr{A}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ définis dans C. III. On note par $\mathscr{J}_{2k}$ l'ensemble des systèmes différentiels d'index $2k$. Les classes d'équivalence de systèmes (deux systèmes différentiels étant équivalents (C. III 4°) s'il existe un changement de variable linéaire et périodique $y = D(t)x$ permettant de transformer l'un en l'autre), ont été représentés par des tirets. On remarquera que certaines classes sont en entier dans $\mathscr{J}_0$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 0$), donc que toute transformation linéaire sur un système de cette classe laisse l'index invariant et nul. Au contraire, si une classe rencontre un $\mathscr{J}_{2k}$ $(k \neq 0)$ (cas où $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 0$), elle les rencontre tous: étant donné un système différentiel dans une telle classe, tout index pair peut être obtenu à l'aide d'une transformation linéaire périodique adéquate.



B. Définition de l'index $i(f, x^0)$

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \tag{3}$$