

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES
Autor: Malgrange, Bernard
Kapitel: 2. Solution elementaire des equations du second ordre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41526>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Notons enfin que l'analyse précédente ne permet de traiter que les discontinuités « d'ordre supérieur », et non les discontinuités du premier ordre, telles qu'elles se présentent en particulier dans les travaux de Riemann, Rankine et Hugoniot sur les fluides compressibles. Dans ce dernier cas, Hadamard, comme les auteurs de cette époque, ne voit d'autre méthode que celle qui consiste à traiter chaque problème physique séparément, en « reprenant la mise en équations », suivant ses propres termes. Nous savons aujourd'hui que, dans un grand nombre de cas (en particulier celui de Riemann-Rankine-Hugoniot, comme l'ont montré Hopf et Lax), les conditions que l'on obtient ainsi sont précisément celles que l'on trouve en écrivant que les équations sont satisfaites au sens des distributions, ce qui permet une discussion mathématique générale de telles discontinuités: ce n'est pas ici le lieu de l'aborder.

2. Solution élémentaire des équations du second ordre

Rappelons rapidement les principes de l'utilisation des solutions élémentaires: soit L un opérateur différentiel linéaire dans R^n , L' son adjoint de Lagrange, et Ω un ouvert de frontière régulière $b\Omega$; on a la formule suivante, dite « de Green »

$$\int_{\Omega} [vL(u) - uL'(v)] dV = \int_{b\Omega} M(u, v) dS$$

M étant une fonction convenable de u , v et de leurs dérivées. Dans le cas *elliptique*, la méthode consiste à trouver, pour tout point $a \in \Omega$, une fonction v ayant une singularité convenable en a (nous préciserons plus loin), vérifiant en dehors de a : $L'(v) = 0$, et à appliquer la formule précédente à Ω privé d'une boule de centre a et de rayon ε . On a alors, avec des notations évidentes:

$$\int_{\Omega - B_{\varepsilon}} v L(u) dV = \int_{b\Omega} M(u, v) dS - \int_{S_{\varepsilon}} M(u, v) dS$$

Lorsque v est choisi convenablement, et lorsque u est assez régulier dans Ω , la dernière intégrale tend vers $-u(a)$ lorsque ε tend vers 0; on obtient donc à la limite

$$\int_{\Omega} v L(u) dV - \int_{b\Omega} M(u, v) dS = u(a)$$

formule qui fait connaître $u(a)$ en fonction des valeurs de $L(u)$ dans Ω , et celles de u et certaines de ses dérivées sur $b\Omega$ (en langage moderne, cette

formule s'écrit, au sens des distributions $L'(v) = \delta_a$). On dira alors que v est une solution élémentaire de L' au point a . Si l'on veut traiter le problème de Dirichlet, ou de Neumann, ou un autre, il faudra encore préciser le choix de v , de manière à ne faire intervenir dans l'intégrale de surface que les combinaisons données de u et de ses dérivées; mais peu importe ici.

Cette méthode avait été appliquée depuis fort longtemps déjà à l'équation de Laplace avec $v = \log r$ pour deux variables, $v = r^{2-n}$ pour $n > 2$ variables, et aux fonctions holomorphes, avec $v = \frac{1}{z}$ (on obtient alors la formule intégrale de Cauchy, avec sa démonstration habituelle; il est d'ailleurs curieux que l'identité de ce cas avec les autres n'ait guère été souligné traditionnellement). Des travaux de divers auteurs, dont Picard, Sommerfeld, Hilbert, et Hadamard lui-même (voir les *Leçons* précédemment citées, pp. 335-338) avaient traité les équations elliptiques à deux variables, à coefficients analytiques; d'importants travaux de Fredholm avaient traité à la même date des équations elliptiques à coefficients constants, l'ordre et le nombre de variables étant quelconques. En 1904, Hadamard [2] démontre l'existence (locale) des solutions élémentaires des équations elliptiques du second ordre, à coefficients analytiques; l'hypothèse d'analyticité sera levée ensuite par la « méthode de la paramétrix », par E. E. Levi et Hilbert.

Quelques précisions sur la méthode et le résultat d'Hadamard. Prenons

$$L(u) = \sum A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C u \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

et supposons les A_{ij} réels, et la forme $\sum A_{ij} \xi_i \xi_j$ définie positive pour tout x ; introduisons la métrique riemannienne dont les coefficients par rapport à des coordonnées covariantes sont égaux aux A_{ij} ; dans cette métrique, L prend la forme $\Delta + M$, Δ étant l'opérateur de Laplace-Beltrami, et M un opérateur du premier ordre; désignons enfin par $\Gamma(x)$ le carré de la distance géodésique du point a donné à un point x voisin de a . Deux cas sont à distinguer:

a) Si n est impair, Hadamard cherche une solution dans le complémentaire de a de l'équation $L(v) = 0$, qui soit de la forme suivante

$$v = \frac{1}{\Gamma^p} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k \Gamma^k, \text{ avec } p = \frac{n-2}{2}, U_0(a) \neq 0, \text{ et les } U_k \text{ analytiques}$$

au voisinage de a . Pour l'obtenir, on passe dans le domaine complexe; en transformant l'équation proposée, on trouve que, sur le cône $\Gamma = 0$ les U_k doivent satisfaire à une équation différentielle le long des géodésiques, qui admet a pour point singulier, et permet de les déterminer de proche en proche; le calcul montre aussi l'unicité de v , une fois choisi $U(a)$ (dont la valeur est d'ailleurs déterminée si l'on veut exactement une solution élémentaire, et non un multiple): un calcul de majorations permet enfin de s'assurer de la convergence de la série obtenue.

b) Dans le cas où n est pair, il cherche une solution de la forme:

$$v = \frac{1}{\Gamma^p} \sum_{k=0}^B U_k \Gamma^k + W \log \Gamma$$

Le procédé est encore analogue au précédent (on détermine encore W par un développement $\sum W_k \Gamma^k$); la solution n'est ici unique qu'à l'addition près d'une solution analytique de $L(u) = 0$.

En vue de l'utilisation ultérieure de la « méthode de descente », Hadamard étudie encore de façon détaillée la relation qui existe entre la solution élémentaire de L , et celle de l'opérateur à $n + 1$ variables $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + L$.

3. La notion de « problème correctement posé »

Il s'agit là d'une des plus importantes contributions d'Hadamard à la théorie. Vers 1900, la distinction entre données (et solutions) différentiables ou analytiques était loin d'être nette dans les esprits, et beaucoup d'auteurs considéraient le théorème de Cauchy-Kowalewskaya comme une réponse satisfaisante au problème de Cauchy; déjà, dans les *Leçons*, Hadamard note, sans s'expliquer davantage, la différence de nature entre ce théorème, et les méthodes de Poisson, Kirchhoff, Riemann, méthodes conduisant à des « formules explicites » et à des vitesses de propagation finies; il note également que les cas traités par ces auteurs, à l'occasion de problèmes physiques, font toujours intervenir des équations dont la partie principale est de signature $(1, n-1)$, et que les surfaces portant les données initiales ont une « orientation d'espace » (comme il dira plus tard) alors que, dans le théorème de Cauchy-Kowalewskaya, ces restrictions n'interviennent pas. La contradiction qui semble se présenter ici sera levée par une analyse célèbre, où les considérations mathématiques sont amenées à