

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF  
**Autor:** Lesieur, L.  
**Kapitel:** 6. Anneaux réguliers  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41528>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ce résultat exprime que *tout idéal premier propre dans  $k[X_1, \dots, X_n]$  est l'idéal des polynômes qui s'annulent en ses zéros algébriques sur  $k$* ; un idéal premier est donc défini par ses zéros algébriques sur  $k$ . Un idéal maximal coïncide avec l'idéal des polynômes qui s'annulent en un point  $M \in \bar{k}^n$  (ils peuvent s'annuler en d'autres points, qui sont en nombre fini, et qu'on appelle les conjugués de  $M$  sur  $k$ ).

Du théorème 7 on déduit d'autres variantes pour le théorème des zéros de Hilbert, par exemple:

**THÉORÈME 8.** *Si un idéal  $I$  dans  $A = k[X_1, \dots, X_n]$  n'a pas de zéros algébriques sur  $k$ , cet idéal est impropre:  $I = A$ .*

En effet, si l'idéal  $I$  était propre, il serait contenu dans un idéal maximal  $M$ , donc premier. Il existerait un polynôme  $F \notin M$  et un zéro de  $M$  donc de  $J$ , qui n'annulerait pas  $F$ .

Sous une forme plus élémentaire, le théorème 8 exprime le résultat suivant: *si le système d'équations:*

$$f_i(X_1, \dots, X_n) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

avec

$$f_i \in k[X_1, \dots, X_n],$$

*n'a pas de solutions dans la clôture algébrique  $\bar{k}$ , il existe des polynômes  $A_i \in k[X_1, \dots, X_n]$  tels que:*

$$\sum_{i=1}^p A_i f_i = 1.$$

Signalons encore la conséquence:

**THÉORÈME 9.** *Si un polynôme  $F \in k[X_1, \dots, X_n]$  s'annule pour tous les zéros algébriques sur  $k$  d'un idéal  $I$  de  $k[X_1, \dots, X_n]$ , il existe un entier  $\rho$  positif tel que:*

$$f^\rho \in I.$$

(Démonstration élémentaire de RABINOVITCH, à partir du théorème 8, exposée par exemple dans [9], p. 4, ou [10], tome II, p. 102.)

## 6. ANNEAUX RÉGULIERS

Le problème intervenant dans la définition d'un anneau de Jacobson est celui de la représentation d'un idéal premier comme intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. On peut exiger davantage:

*Problème 2. Quels sont les anneaux (commutatifs et unitaires) tels que tout idéal soit l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent?*

Dans un tel anneau, on a nécessairement:

$$(4) \quad Aa^2 = Aa, \quad \forall a \in A,$$

car les idéaux maximaux qui contiennent  $a$  sont identiques à ceux qui contiennent  $a^2$ ; leur intersection est donc la même pour l'idéal engendré par  $a$  et pour l'idéal engendré par  $a^2$ . La relation (4) s'écrit encore:

$$(5) \quad \forall a \in A, \quad \exists x \in A \quad \text{tel que:} \quad a = xa^2 = axa.$$

*Définition 5.* Un anneau vérifiant la propriété (5) s'appelle un anneau régulier (au sens de J. Von NEUMANN).

Les anneaux qui sont solution du problème 2 sont donc réguliers.

Réciproquement, un anneau régulier est solution du problème 2. Démontrons d'abord que le radical de Jacobson de l'anneau régulier  $A$  est nul. Si  $a \in R_J$ , l'égalité:

$$a(1 - xa) = 0,$$

entraîne  $a = 0$  car  $1 - xa$  est inversible d'après le théorème 1. On démontre de même que le radical de Jacobson de l'anneau quotient  $A/I$  est nul,  $I$  étant un idéal quelconque. Il en résulte que l'idéal  $I$  est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

On a donc démontré le théorème suivant:

**THÉORÈME 10.** *Pour qu'un anneau soit solution du problème 2, il faut et il suffit qu'il soit régulier.*

Remarquons qu'un anneau régulier intègre est un corps et que, dans un anneau régulier, tout idéal premier est maximal.

## 7. LE PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE SPECTRALE

Il est remarquable que certains problèmes fondamentaux de l'Analyse admettent une formulation algébrique empruntée à la théorie des idéaux et aux idéaux maximaux. Je citerai *le problème de la synthèse spectrale*. En analyse, on fait intervenir, outre la structure d'anneau, une structure topologique. Les idéaux les plus intéressants sont les idéaux fermés, d'autant plus que tout idéal maximal est fermé. Le problème de la synthèse