6. Anneaux réguliers

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Ce résultat exprime que *tout idéal premier propre dans* k $[X_1, ..., X_n]$ *est l'idéal des polynômes qui s'annulent en ses zéros algébriques sur* k; un idéal premier est donc défini par ses zéros algébriques sur k. Un idéal maximal coïncide avec l'idéal des polynômes qui s'annulent en un point $M \in \bar{k}^n$ (ils peuvent s'annuler en d'autres points, qui sont en nombre fini, et qu'on appelle les conjugués de M sur k).

Du théorème 7 on déduit d'autres variantes pour le théorème des zéros de Hilbert, par exemple:

THÉORÈME 8. *Si un idéal* I *dans* A = k $[X_1, ..., X_n]$ *n'a pas de zéros algébriques sur* k, *cet idéal est impropre :* I = A.

En effet, si l'idéal I était propre, il serait contenu dans un idéal maximal M, donc premier. Il existerait un polynôme $F \notin M$ et un zéro de M donc de J, qui n'annulerait pas F.

Sous une forme plus élémentaire, le théorème 8 exprime le résultat suivant: *si le système d'équations :*

$$f_i(X_1, ..., X_n) = 0 \, ; \qquad i = 1, 2, ..., p \, ,$$

avec

$$f_i \in k[X_1, ..., X_n] \, ,$$

n'a pas de solutions dans la clôture algébrique $\bar{k}$, *il existe des polynômes* $A_i \in$ k $[X_1, ..., X_n]$ *tels que :*

$$\sum_{i=1}^{p} A_i f_i = 1 \, .$$

Signalons encore la conséquence:

THÉORÈME 9. *Si un polynôme* F $\in$ k $[X_1, ..., X_n]$ *s'annule pour tous les zéros algébriques sur* k *d'un idéal* I *de* k $[X_1, ..., X_n]$, *il existe un entier* ρ *positif tel que :*

$$f^{\rho} \in I \, .$$

(Démonstration élémentaire de RABINOVITCH, à partir du théorème 8, exposée par exemple dans [9], p. 4, ou [10], tome II, p. 102.)

6. ANNEAUX RÉGULIERS

Le problème intervenant dans la définition d'un anneau de Jacobson est celui de la représentation d'un idéal premier comme intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. On peut exiger davantage:

Problème 2. Quels sont les anneaux (commutatifs et unitaires) tels que tout idéal soit l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent?

Dans un tel anneau, on a nécessairement:

$$(4) \qquad Aa^2 = Aa\,, \quad \forall a \in A\,,$$

car les idéaux maximaux qui contiennent a sont identiques à ceux qui contiennent a^2; leur intersection est donc la même pour l'idéal engendré par a et pour l'idéal engendré par a^2. La relation (4) s'écrit encore:

$$(5) \qquad \forall a \in A\,, \quad \exists x \in A \quad \textit{tel que:} \quad a = xa^2 = axa\,.$$

Définition 5. Un anneau vérifiant la propriété (5) s'appelle un anneau *régulier* (au sens de J. Von NEUMANN).

Les anneaux qui sont solution du problème 2 sont donc réguliers.

Réciproquement, un anneau régulier est solution du problème 2. Démontrons d'abord que le radical de Jacobson de l'anneau régulier A est nul. Si $a \in R_J$, l'égalité:

$$a(1-xa) = 0\,,$$

entraîne $a = 0$ car $1 - xa$ est inversible d'après le théorème 1. On démontre de même que le radical de Jacobson de l'anneau quotient A/I est nul, I étant un idéal quelconque. Il en résulte que l'idéal I est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

On a donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Pour qu'un anneau soit solution du problème 2, il faut et il suffit qu'il soit régulier.*

Remarquons qu'un anneau régulier intègre est un corps et que, dans un anneau régulier, tout idéal premier est maximal.

7. LE PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE SPECTRALE

Il est remarquable que certains problèmes fondamentaux de l'Analyse admettent une formulation algébrique empruntée à la théorie des idéaux et aux idéaux maximaux. Je citerai *le problème de la synthèse spectrale.* En analyse, on fait intervenir, outre la structure d'anneau, une structure topologique. Les idéaux les plus intéressants sont les idéaux fermés, d'autant plus que tout idéal maximal est fermé. Le problème de la synthèse