OCTAÈDRES ARTICULÉS DE BRICARD

OCTAÈDRES ARTICULÉS DE BRICARD

par Henri LEBESGUE

Cet article reproduit un chapitre d'un cours d'Henri Lebesgue sur les polyèdres, professé au Collège de France en 1938-1939.

Il étudie une question qui avait été traitée par Raoul Bricard dans deux articles parus au *Journal de Liouville* en 1897 et au *Bulletin des sciences mathématiques* en 1909. Mais, alors que les démonstrations de R. Bricard sont de nature mécanique et analytique, celles d'H. Lebesgue sont de nature géométrique et synthétique.

La rédaction de cet article est due à M$^{\text{lle}}$ Colette Paris qui a utilisé des notes de M$^{\text{lle}}$ Lucienne Felix et de M. François Châtelet.

Le théorème de Cauchy montre qu'un polyèdre convexe (polyèdre situé tout entier d'un même côté du plan de l'une quelconque de ses faces), dont les faces sont indéformables, ne peut être déformé dans son ensemble. Ce résultat ne s'étend pas aux polyèdres concaves. En effet, Bricard a donné des exemples de polyèdres concaves, qui peuvent être déformés, sans déformer leurs faces.

Les polyèdres déformables de Bricard sont des octaèdres: un octaèdre est formé par 8 faces triangulaires, il possède 6 sommets par chacun desquels passent 4 faces, donc aussi 4 arêtes, le nombre total des arêtes est 12 (fig. 1 et 2).

Puisque toutes les faces sont triangulaires, il suffit que les côtés soient constants, pour que les faces soient indéformables. On peut donc réaliser un octaèdre de Bricard en matérialisant chaque arête par une tige solide; ces tiges sont reliées entre elles (4 par 4) aux différents sommets de manière à pouvoir tourner librement autour de ces sommets. Par contre, les faces constantes ne peuvent être toutes réalisées matériellement: en effet, certaines de ces faces se traversent l'une l'autre le long de fausses arêtes qui ne restent pas fixes à l'intérieur de chacune de ces faces au cours de la déformation du polyèdre.

Bricard a recherché et obtenu tous les types possibles d'octaèdres articulés. Nous allons décrire et étudier les types obtenus, sans toutefois chercher à montrer que ce sont les seuls types possibles.

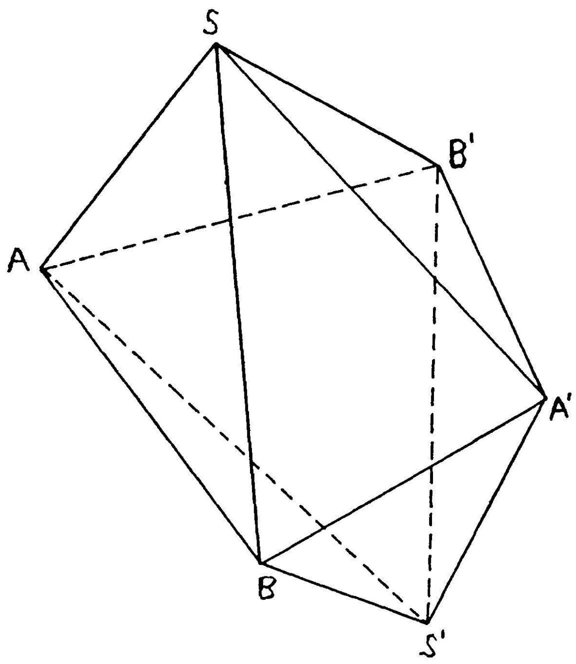

Fig 1

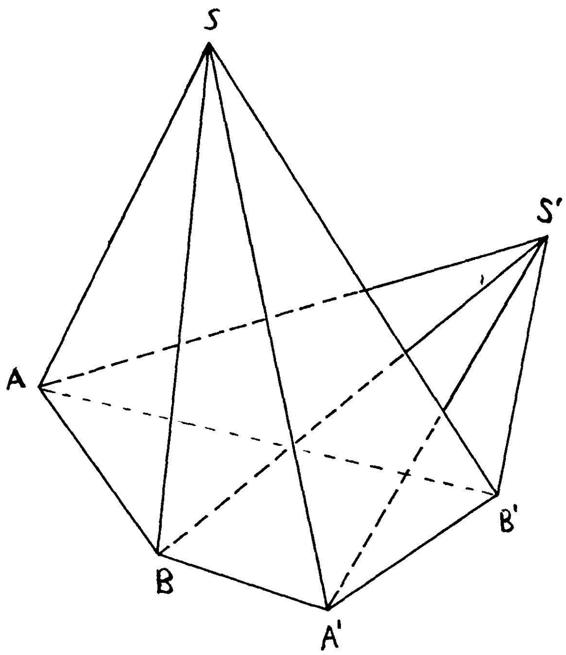

Fig 2

1. Premier type d'octaèdre articulé

Pour réaliser un octaèdre, dont nous désignerons les sommets par $SABA'\,B'\,S'$, commençons par réaliser les quatre faces, qui ont en commun le point S, c'est-à-dire les faces SAB, SBA', $SA'\,B'$ et $SB'\,A$; pour cela nous articulons entre elles les tiges qui matérialisent les différents côtés SA, SB, SA', SB', AB, BA', $A'\,B'$ et $B'\,A$. Pour terminer l'octaèdre, il suffira de placer les tiges, qui représentent les côtés $S'\,A$, $S'\,B$, $S'\,A'$ et $S'\,B'$ (fig. 2).

Remarquons d'abord que le demi-octaèdre formé par ces quatre premières faces est déformable et que sa déformation dépend d'un paramètre, quel que soit le choix des longueurs des arêtes. En effet, le quadrilatère gauche $ABA'\,B'$ est déformable et sa déformation dépend de deux paramètres, par exemple les longueurs des diagonales AA' et BB'. Si on ajoute à ce quadrilatère articulé les quatre tiges qui représentent les côtés SA, SB, SA' et SB', on n'introduit qu'une seule relation entre les paramètres précédents.

La déformation du demi-octaèdre obtenu dépend donc encore d'un paramètre.

Si on complète l'octaèdre en plaçant les tiges $S'A$, $S'B$, $S'A'$ et $S'B'$, on introduit une nouvelle relation entre les paramètres primitifs et ceux-ci se trouvent ainsi déterminés, à moins que la nouvelle relation introduite ne soit une conséquence de la relation précédente.

Or, choisissons le quadrilatère $ABA'B'$ de manière que

$$AB = AB' \quad \text{et} \quad A'B = A'B' .$$

Ce quadrilatère admet un plan de symétrie: le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans $AA'B$ et $AA'B'$. Choisissons S' symétrique de S par rapport à ce plan; les côtés vérifient les relations:

$$SA = S'A , \qquad SA' = S'A' , \qquad SB = S'B' , \qquad SB' = S'B .$$

Lorsque le demi-octaèdre se déforme de manière que les côtés SA, SB, SA', SB' restent constants, il en est de même des longueurs $S'A$, $S'B$, $S'A'$ et $S'B'$.

L'introduction de nouvelles tiges entre S' et les sommets A, B, A', B' n'introduit donc pas de nouvelle relation entre les paramètres qui définissent le demi-octaèdre; l'octaèdre articulé $SABA'B'S'$ possède le même degré de liberté que le demi-octaèdre.

Choisissons encore un quadrilatère $ABA'B'$, tel que:

$$AB = A'B' , \quad \text{et} \quad A'B = AB' .$$

Ce quadrilatère admet un axe de symétrie: la perpendiculaire commune à AA' et BB'. Choisissons pour sommet S' le symétrique de S par rapport à cet axe. Les côtés vérifient les relations:

$$SA = S'A' , \qquad SB = S'B' , \qquad SA' = S'A , \qquad SB' = S'B .$$

Lorsque le demi-octaèdre se déforme de manière que les côtés SA, SB, SA', SB' restent constants, il en est de même des longueurs $S'A$, $S'B$, $S'A'$ et $S'B'$. L'octaèdre articulé a donc le même degré de liberté que le demi-octaèdre.

Il faut remarquer que les deux constructions précédentes conduisent au même type d'octaèdre suivant le choix des sommets qui jouent le rôle de S et S'.

Enfin, si on choisit un quadrilatère $ABA'B'$, tel que:

$$AB = A'B' = A'B = AB' ,$$

ce quadrilatère possède trois éléments de symétrie: le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans $AA'B$ et $AA'B'$, le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans $BB'A$ et $BB'A'$ et la perpendiculaire commune à AA' et BB'. Il y a trois façons de choisir S' pour chaque position de S. On peut même relier les sommets $ABA'B'$ à ces trois points S', S'', S''' sans modifier le degré de liberté du demi-octaèdre articulé; on obtient ainsi un système articulé de vingt barres.

2. Dernier type d'octaèdre articulé

Considérons un quadrilatère $ABA'B'$ et choisissons sur le support de chacun de ces côtés une direction. Ce qui permet de mesurer algébriquement les segments situés sur ces côtés.

Supposons que ces mesures algébriques vérifient la relation:

$$\overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'A} = 0\,. \tag{1}$$

Soient α le plan bissecteur des côtés orientés $B'A$ et AB, β le plan bissecteur des côtés orientés AB et BA', α' le plan bissecteur des côtés orientés BA' et $A'B'$, β' le plan bissecteur des côtés orientés $A'B'$ et $B'A$.

Si P est un point quelconque de la droite $B'A$, désignons par P_1, P_2, P_3, P_4 les points qui s'en déduisent par les symétries successives par rapport aux plans α, puis β, puis α', enfin β'. Le point P_1 est sur AB, le point P_2 sur BA', le point P_3 sur $A'B'$, le point P_4 sur $B'A$.

De plus:

$$\begin{aligned}
\overline{AP_1} &= \overline{AP} = \overline{B'P} - \overline{B'A} \\
\overline{BP_2} &= \overline{BP_1} = \overline{AP_1} - \overline{AB} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} \\
\overline{A'P_3} &= \overline{A'P_2} = \overline{BP_2} - \overline{BA'} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} - \overline{BA'} \\
\overline{B'P_4} &= \overline{B'P_3} = \overline{A'P_3} - \overline{A'B'} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} - \overline{BA'} - \overline{A'B'}\,.
\end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse sur les mesures algébriques des côtés:

$$\overline{B'P_4} = \overline{B'P}\,.$$

Donc le produit des symétries par rapport à α, β, α', β', qui est un déplacement, conserve tous les points de AB', c'est une rotation d'axe AB' ou la transformation identique.

Mais le produit des symétries par rapport à α et β est une rotation dont l'axe est l'intersection $\alpha\beta$ de α et β; de même le produit des symétries par rapport à α' et β' est une rotation dont l'axe est l'intersection $\alpha'\ \beta'$ de α' et β'.

Si le produit de ces rotations est une rotation d'axe AB' distincte de la transformation identique, les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\ \beta'$ se coupent sur AB'.

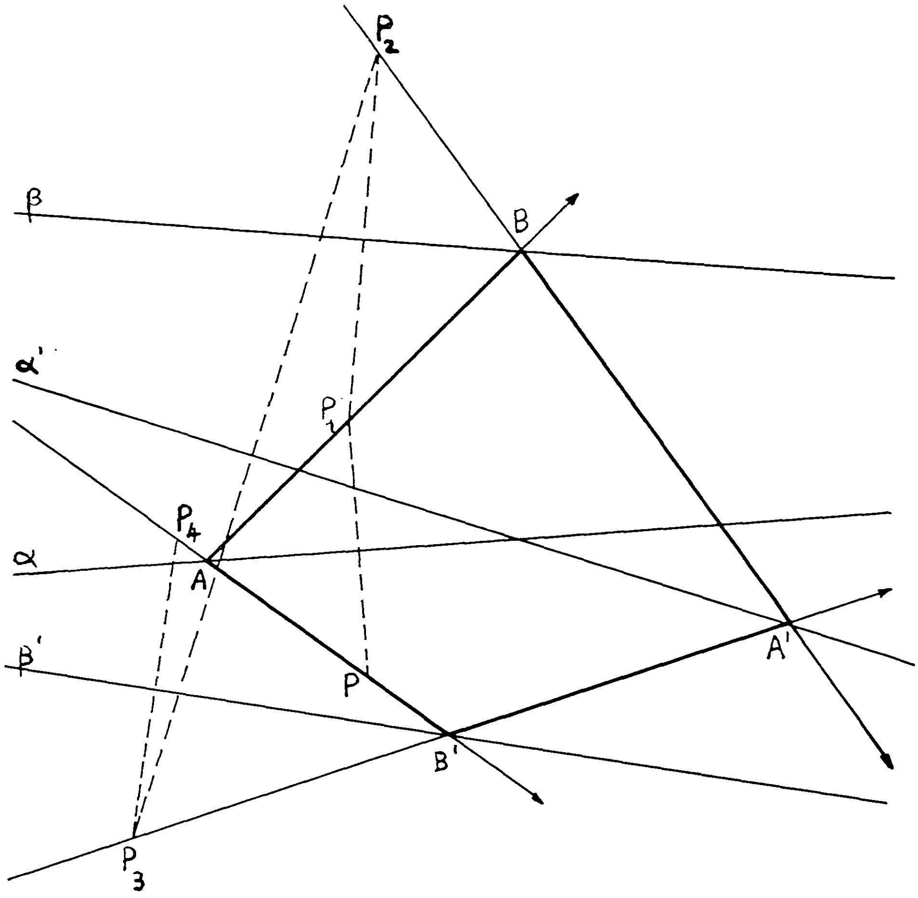

Fig 3

Mais la droite $\alpha\beta$, qui est contenue dans le plan α, ne peut couper AB' qu'en A et la droite $\alpha'\ \beta'$, qui est contenue dans β' ne peut couper AB' qu'en B', les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\ \beta'$ n'étant pas confondues avec AB' ne peuvent donc pas se couper sur AB' et le produit des rotations d'axes $\alpha\beta$ et $\alpha'\ \beta'$ est la transformation identique.

Ceci n'est possible que si ces deux droites sont confondues, c'est-à-dire si les quatre plans bissecteurs α, β, α', β' ont en commun une droite XY (qui est rejetée à l'infini, si α, β, α', β' sont parallèles, c'est-à-dire si le quadrilatère $ABA'\ B'$ est un parallélogramme).

Réciproquement, si les quatre plans bissecteurs ont en commun une droite XY, orientons cette droite; les côtés orientés font le même angle avec cette droite orientée. Donc les mesures algébriques des segments:

$$\overline{AB}, \quad \overline{BA'}, \quad \overline{A'\,B'}, \quad \overline{B'\,A}$$

sont proportionnelles aux mesures de leurs projections sur XY; comme la somme des mesures de ces projections est nulle, la somme des mesures des segments est également nulle. [1])

L'égalité (1) se conserve dans une déformation du quadrilatère $ABA'B'$ qui conserve les longueurs des côtés; donc les propriétés précédentes se conservent aussi dans cette déformation.

Remarquons encore qu'il est facile de construire des quadrilatères vérifiant l'égalité (1). En effet, si par une déformation, nous aplatissons le quadrilatère sur un plan P, les plans bissecteurs des côtés orientés deviennent les plans perpendiculaires à P passant par les bissectrices dans P des côtés orientés. Ces bissectrices concourent donc en un point K qui est également distant de ces côtés. Le quadrilatère aplati est donc circonscriptible à un cercle de centre K.

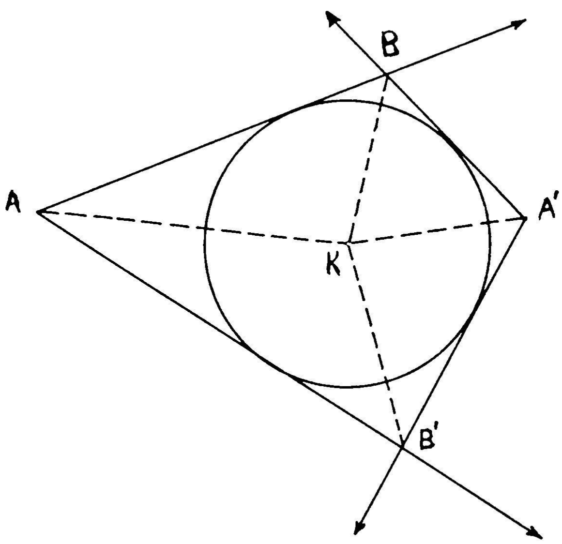

Fig 4

Réciproquement, si un quadrilatère plan est circonscrit à un cercle de centre K, la somme:

$$\overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'A}$$

est bien nulle, à condition d'orienter les côtés de manière qu'ils soient symétriques par rapport aux droites joignant K aux sommets A, B, A', B' (fig. 4).

Il suffit enfin de déformer un tel quadrilatère plan pour obtenir un quadrilatère gauche vérifiant l'égalité (1).

Considérons un quadrilatère $ABA'B'$ vérifiant l'équation (1) et choisissons un plan σ passant par XY. Ce plan coupe AB en un point x et $A'B'$ en un point x'. La droite xx', située dans le plan σ, coupe XY en X; la droite xx' est encore l'intersection des plans ABX et $A'B'X$. De plus, nous savons que les droites AB et $A'B'$ sont homologues dans une rotation

---

[1]) Si les quatre plans bissecteurs ont en commun une droite XY,

$$\overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'A} = 0\,.$$

Les côtés orientés font avec la droite XY orientée le même angle, les mesures algébriques des segments sont proportionnelles aux mesures de leurs projections sur XY et

$$\overline{ab} + \overline{ba'} + \overline{a'b'} + \overline{b'a} = 0 \qquad \text{(relation de Chasles).}$$

d'axe XY (le produit des symétries par rapport aux plans β et α'); les plans ABX et $A'\,B'\,X$ sont aussi homologues dans cette rotation. Ce qui exige que ces plans soient symétriques par rapport au plan qui contient XY et leur intersection xx', c'est-à-dire au plan σ.

D'autre part, $A'\,B$ coupe σ en un point y, AB' coupe σ en un point y'; la droite yy' coupe XY en un point Y.

Comme précédemment, les plans $AB'\,Y$ et $A'\,BY$ sont symétriques par rapport au plan σ. Les droites xx' et yy' du plan σ se coupent en un point S qui est commun aux quatre plans ABX, $A'\,B'\,X$, $AB'\,Y$ et $A'\,BY$. La droite SA, qui est commune aux plans ABX et $AB'\,Y$ est symétrique par rapport à σ de l'intersection des plans $A'\,B'\,X$ et $A'\,BY$, c'est-à-dire de la droite SA'. De même les droites SB et SB' sont symétriques par rapport à σ. Le plan σ est un plan de symétrie pour l'angle polyèdre $SABA'\,B'$.

L'existence d'un plan de symétrie de l'angle polyèdre $SABA'\,B'$ ne caractérise toutefois pas le demi-octaèdre $SABA'\,B'$.

En effet, on peut montrer qu'il existe des demi-octaèdres $SABA'\,B'$, tels que le quadrilatère $ABA'\,B'$ vérifie la relation (1) et que SA et SA', SB et SB' soient respectivement symétriques par rapport à un plan ne passant pas par XY.

Or nous cherchons à construire un demi-octaèdre $SABA'\,B'$, tel que le quadrilatère $ABA'\,B'$ vérifie la relation (1) et que SA et SA', SB et SB' soient respectivement symétriques par rapport au plan passant par XY et S, et nous venons de voir qu'il existe dans tout plan σ passant par XY un point S satisfaisant aux conditions précédentes, nous allons montrer que ce point S est unique.

Il se peut qu'il existe une infinité de points S, tels que SA et SA' d'une part, SB et SB' d'autre part, soient symétriques par rapport au plan σ passant par XY et S. Ce cas se produit lorsque le plan médiateur du segment AA' passe par XY. Mais il est inutile d'étudier ce cas. En effet, les points A et A' sont alors dans un même plan perpendiculaire à XY, et puisque ces points sont aussi sur les droites AB et $A'\,B$ symétriques par rapport au plan β qui passe par XY et B, les points A et A' sont symétriques par rapport à ce plan. Donc le plan β est confondu avec le plan médiateur de AA', ce qui entraîne:

$$AB = BA'\,.$$

De même le plan β' est confondu avec le plan médiateur de AA' et

$$AB' = B'\,A'\,.$$

Ces deux relations sont d'ailleurs vraies en signe, puisque les orientations de AB et BA', par exemple, doivent être choisies symétriques par rapport au plan β.

Mais en comparant la relation (1) avec ces égalités, on obtient que:

$$\overline{AB} = \overline{B' A'}$$

et par suite:

$$\overline{AB} = \overline{BA'} = \overline{AB'} = \overline{B' A'} .$$

Les octaèdres correspondant aux quadrilatères qui vérifient ces égalités ont déjà été étudiés.

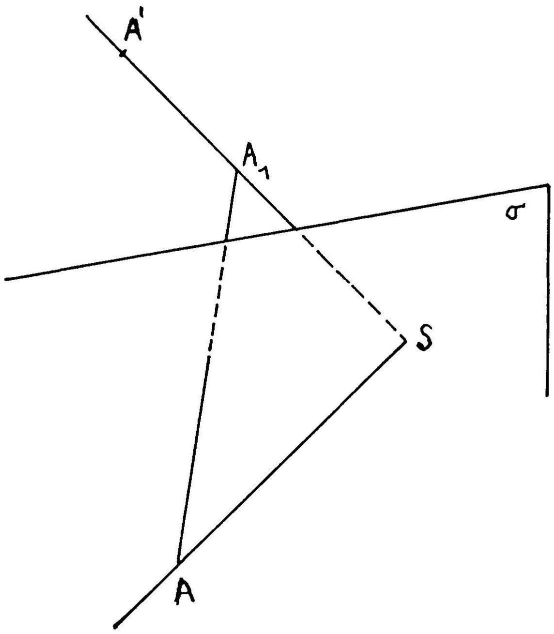

Fig 5

Si le plan médiateur de AA' ne passe pas par XY, le symétrique A_1 de A par rapport à un plan σ passant par XY ne peut être confondu avec A'. Pour que SA et SA' soient symétriques par rapport à σ, il est nécessaire que les droites SA' et $A' A_1$ soient confondues, c'est-à-dire que A_1 soit situé sur SA' (fig. 5). Il n'existe donc qu'un point S dans le plan σ, tel que SA et SA' soient symétriques par rapport à σ. Mais nous avons montré qu'il existe un point S dans ce plan tel que SA et SA', SB et SB' soient respectivement symétriques par rapport à σ. Donc la propriété que SA et SA' sont symétriques par rapport à σ a pour conséquence que SB et SB' sont aussi symétriques par rapport à ce plan.

Terminons la construction de l'octaèdre $SABA' B' S'$. Pour cela cherchons l'intersection S' des symétriques $S' A$ de SA par rapport à α et $S' A'$ de SA' par rapport à α'; ces deux droites se coupent puisqu'elles peuvent être déduites l'une de l'autre par symétrie par rapport aux plans α, σ, α' qui passent tous par XY[2]). De plus le produit des trois symétries précédentes

[2]) Δ = symétrique de SA par rapport à α,
Δ' = symétrique de SA' par rapport à α';
symétrique de Δ par rapport à α = SA,
symétrique de SA par rapport à σ = SA',
symétrique de SA' par rapport à α' = Δ'.

est la symétrie par rapport au plan σ' qui passe par XY et S'. Donc les plans bissecteurs des côtés successifs du quadrilatère $SAA'S'$ passent par XY et ce quadrilatère vérifie l'égalité (1). Remarquons encore que le produit des symétries par rapport aux plans α, σ, α', σ' est la transformation identique. Ce qui montre notamment que l'angle des plans α et σ est égal à l'angle des plans σ' et α'.

D'après une propriété précédente, la condition que $S'A$ et $S'A'$ sont symétriques par rapport à σ' entraîne que $S'B$ et $S'B'$ le sont aussi. Construisons le point S'' intersection des droites $S''B$ symétrique de SB par rapport à β et $S''B'$ symétrique de SB' par rapport à β'. Ce point est dans le plan σ'' tel que l'angle de β et σ soit égal à celui de σ'' et β'; ce plan σ'' est donc confondu avec σ' [3]). De plus S'' est tel que $S''B$ et $S''B'$ sont symétriques par rapport à σ'; donc S'' est confondu avec S'. Le quadrilatère $SBB'S'$ vérifie par suite la relation (1).

En résumé, pour construire un octaèdre $SABA'B'S'$ ayant les propriétés précédentes, il suffit d'imposer les trois conditions suivantes:

1) le quadrilatère $ABA'B'$ vérifie la relation (1),
2) le quadrilatère $SAA'S'$ vérifie la relation (1),
3) les axes XY correspondent aux quadrilatères précédents sont confondus.

Ces trois conditions caractérisent bien un tel octaèdre. En effet, les deux premières conditions entraînent que SA et SA' sont symétriques par rapport au plan σ passant par XY et S et que l'angle des plans α et σ est égal à l'angle des plans σ' et α'.

La dernière condition peut être traduite par des conditions métriques:
l'angle des droites AB et SA est égal à l'angle des droites AB' et $S'A$,
l'angle des droites AB' et SA est égal à l'angle des droites AB et $S'A$,
l'angle des droites $A'B$ et SA' est égal à l'angle des droites $A'B'$ et $S'A'$,
l'angle des droites $A'B'$ et SA' est égal à l'angle des droites $A'B$ et $S'A'$.

Il reste à montrer qu'un octaèdre soumis aux trois conditions précédentes peut être déformé en maintenant ses faces invariables. Comme nous l'avons

---

3) en effet $(\alpha, \beta) = (\beta', \alpha')$ ou $(\beta, \sigma) = (\sigma', \beta')$
$(\beta, \alpha) = (\alpha', \beta')$ et $(\alpha, \sigma) = (\sigma', \alpha')$ $\rightarrow (\beta, \sigma) = (\sigma', \beta')$
comme $(\beta, \sigma) = (\sigma'', \beta')$ $\sigma' \equiv \sigma''$.

déjà vu, le demi-octaèdre $SABA' B'$ peut être déformé et sa déformation dépend d'un paramètre. Construisons, pour chaque position de ce demi-octaèdre le point S' intersection des droites $S' A$ symétrique de SA par rapport au plan α et $S' A'$ symétrique de SA' par rapport au plan α'. Les résultats précédents montrent les égalités d'angle de droites: [4])

$$\begin{aligned}
(AB, SA) &= (AB', S' A)\\
(AB', SA) &= (AB, S' A)\\
(BA, SB) &= (BA', S' B)\\
(BA', SB) &= (BA, S' B)\\
(A' B, SA') &= (A' B', S' A')\\
(A' B', SA') &= (A' B, S' A')\\
(B' A, SB') &= (B' A', S' B')\\
(B' A', SB') &= (B' A, S' B') .
\end{aligned}$$

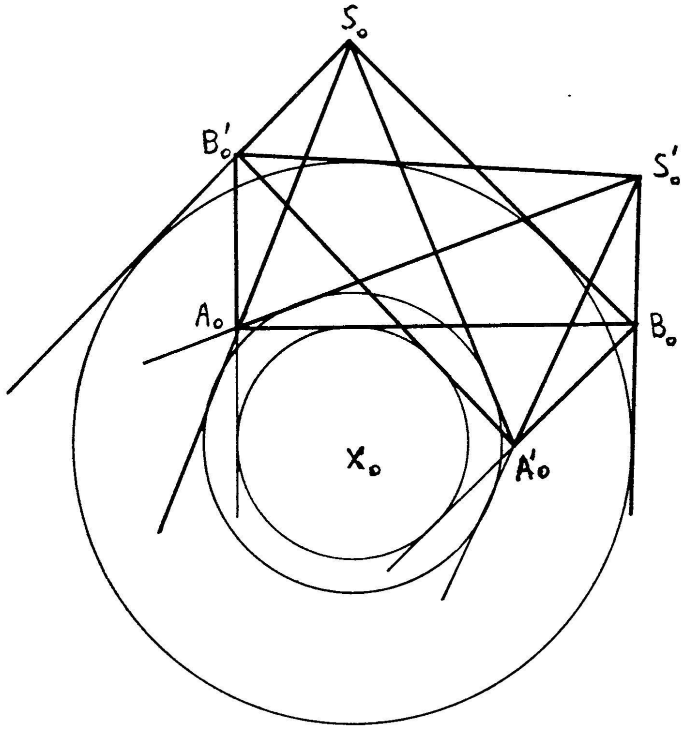

Fig 6

Mais dans la déformation du demi-octaèdre $SABA' B'$ tous les premiers membres de ces égalités restent fixes, donc aussi les seconds membres. Les quatre triangles ABS', $AB' S'$, $B' A' S'$ et $A' BS'$ ont chacun un côté constant et les deux angles adjacents à ce côté fixes; ces triangles restent donc invariables dans la déformation. Toutes les faces de l'octaèdre restent ainsi invariables.

Il est possible de construire un tel octaèdre de façon analogue à la construction précédente des quadrilatères $ABA' B'$.

Dans un plan, choisissons un triangle $S_0\, A_0\, B_0$ et un point X_0 qui ne soit situé sur aucun côté de ce triangle, et distinct du point de concours des

4) Les axes XY correspondant aux quadrilatères $AB\,A'\,B'$ et $AS\,A'\,S'$ sont confondus, les côtés de chacun des quadrilatères font les mêmes angles avec XY.

$$\left.\begin{aligned}(AB, XY) &= (AB', XY)\\ (XY, SA) &= (XY, SA')\end{aligned}\right\} \rightarrow (AB, SA) = (AB', S'A) .$$

bissectrices. Construisons le point A'_0 intersection de la droite symétrique de $A_0\,B_0$ par rapport à $B_0\,X_0$ et de la droite symétrique de $A_0\,S_0$ par rapport à $S_0\,X_0$.

Construisons de façon analogue les points B'_0 (intersection de la droite symétrique de $B_0\,S_0$ par rapport à $S_0\,X_0$ et de la droite symétrique de $B_0\,A_0$ par rapport à $A_0\,X_0$), et S'_0 (intersection de la droite symétrique de $S_0\,A_0$ par rapport à $A_0\,X_0$ et de la droite symétrique de $S_0\,B_0$ par rapport à $B_0\,X_0$). Les quadrilatères $A_0\,B_0\,A'_0\,B'_0$, $A_0\,S_0\,A'_0\,S'_0$ et $B_0\,S_0\,B'_0\,S'_0$ sont circonscrits respectivement à trois cercles de centre X_0. (fig. 6)

Déformons alors la figure $S_0\,A_0\,B_0\,A'_0\,B'_0\,S'_0$ en laissant constants ses côtés de manière à obtenir un véritable octaèdre $SABA'\,B'\,S'$ (non aplati). Les trois quadrilatères $ABA'\,B'$, $ASA'\,S'$, et $BSB'\,S'$ vérifient la relation (1), donc l'octaèdre $SABA'\,B'\,S'$ vérifie les propriétés demandées.

vide-leer-empty