

§4. Relations entre A.N.R. et C.W. complexes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(Palais, lemme 6.2.)

Une fois en possession de ce lemme, on poursuit la démonstration de la façon suivante:

Comme la relation « être dominé par » est transitive, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est un ouvert d'un convexe contenu dans un E.V.T., localement convexe, métrisable.

On choisit un recouvrement ouvert $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X par des ouverts convexes.

On choisit un recouvrement ouvert $\{0_\beta\}_{\beta \in B}$ de X , satisfaisant la conclusion du lemme.

Soit K le complexe simplicial associé au recouvrement $\{0_\beta\}_{\beta \in B}$; on considérera K comme réalisé géométriquement dans $\mathbf{R}^{(B)}$, les sommets de K étant les vecteurs de la base standard.

Comme d'habitude, une partition de l'unité, associée au recouvrement $\{0_\beta\}$ fournit une application f de X dans K .

Si, pour tout $\beta \in B$, on choisit un point $x_\beta \in 0_\beta$, on définit une application linéaire de $\mathbf{R}^{(B)}$ dans l'E.V.T., dont la restriction g à K a son image

dans X , car si une intersection $\bigcap_{i=1}^n 0_{\beta_i} \neq \emptyset$, l'enveloppe convexe de sa réunion $\subset W_\alpha$, et donc dans X .

Pour une raison analogue $g \circ f$ est homotope à id_X .

C.q.f.d.

N. B. : La même preuve montre que si X est séparable, il est dominé par un C.W.-complexe dénombrable et que s'il est compact il est dominé par un C.W. complexe fini.

§ 4. RELATIONS ENTRE A.N.R. ET C.W. COMPLEXES

Rappelons pour commencer quelques définitions et un théorème.

Soient X et Y deux espaces topologiques connexes et soit $f: X \rightarrow Y$ telle que $f: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ soit un isomorphisme, $\forall n$. On dit que f est alors une équivalence d'homotopie faible.

Par opposition, une équivalence d'homotopie (usuelle) est parfois appelée équivalence d'homotopie forte.

THÉORÈME: Si X et Y sont deux espaces topologiques connexes dominés par des C.W. complexes, une équivalence d'homotopie faible entre X et Y est nécessairement une équivalence d'homotopie forte.

(J. H. C. Whitehead, thm. 1.)

N. B.: On passe des espaces connexes aux espaces non-connexes de façon évidente. Par « connexe », on entend « connexe par arcs ».

Rappelons maintenant un théorème dû à J. H. C. Whitehead, Giever, Milnor, etc. Pour une démonstration, voir Milnor [1].

THÉORÈME: Soit X un espace topologique connexe. Alors X a le type d'homotopie faible d'un C.W. complexe.

Idée de la démonstration: (Cf. Milnor [1].)

Soit $S(X)$ l'ensemble semi-simplicial ayant pour n -simplexes les applications continues $\varphi: \Delta^n \rightarrow X$; et les opérateurs « faces » et « dégénérescences » évidents.

Soit $|S(X)|$ la réalisation géométrique de $S(X)$.

On a une application $f: |S(X)| \rightarrow X$ naturelle. En effet, soit x un point de $|S(X)|$ appartenant à la n -cellule $\varphi: \Delta^n \rightarrow X$. Par définition, f envoie x sur $\varphi(x)$.

La restriction de f à chaque cellule est évidemment continue. Par la propriété fondamentale de la topologie faible, f est continue.

Enfin, Milnor montre que f induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

C.q.f.d.

Corollaire: Un espace topologique dominé par un C.W. complexe a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Corollaire: Un A.N.R. a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Corollaire: Un A.N.R. X est un A.R. si et seulement si $\pi_i(X) = 0 \forall i$.

Il est clair qu'un A.N.R. n'est pas homéomorphe à un C.W. complexe, en général.

Réciproquement, un C.W. complexe n'est généralement pas homéomorphe à un A.N.R. En effet, un C.W. complexe n'est, en principe, pas métrisable. On montre qu'un C.W. complexe est métrisable si et seulement s'il est localement fini. Dans ce cas, il est homéomorphe à un A.N.R. (voir Borsuk, chap. 4).

J'ignore si un C.W. complexe a toujours le type d'homotopie d'un A.N.R. En ce qui concerne les A.N.R. séparables, Milnor [2] rappelle que l'on a le théorème suivant:

THÉORÈME: Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) X est dominé par un C.W. complexe dénombrable;
- 2) X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable;
- 3) X a le type d'homotopie d'un complexe simplicial dénombrable, localement fini;
- 4) X a le type d'homotopie d'un A.N.R. séparable.

Indiquons brièvement sur quoi repose la démonstration:

a) 1) \Rightarrow 2) Ceci est essentiellement une astuce de Whitehead [2]. X étant dominé par un C.W. complexe, $f: |S(X)| \rightarrow X$ est une équivalence d'homotopie. Soit g un inverse de f . Soit, de plus, K un C.W. complexe dénombrable et soient $\lambda: X \rightarrow K$ et $\mu: K \rightarrow X$ telles que $\mu \circ \lambda \simeq id_X$. Soit: $g \circ \mu: K \rightarrow |S(X)|$. Comme K est dénombrable, l'image de K par cette application est contenue dans un sous-complexe L_1 de $|S(X)|$, dénombrable.

Soit $H_t: |S(X)| \rightarrow |S(X)|$ une homotopie reliant l'identité à $g \circ f$. Soit L_2 un complexe contenant l'image de L_1 par l'homotopie H . On peut choisir L_2 dénombrable. En itérant indéfiniment le procédé, on construit une suite de sous-complexes dénombrables $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots, L_k$ étant un sous-complexe contenant l'image par H de L_{k-1} . On a $L_1 \subset L_2 \subset \dots$.

Soit $L = \cup L_k$. L est dénombrable.

Soit $f_1 = f|_L: L \rightarrow X$ et soit $g_1 = g \circ \mu \circ \lambda: X \rightarrow L$.

On vérifie facilement que $g_1 f_1 \simeq id$ et $f_1 \circ g_1 \simeq id$.

2) \Rightarrow 3) est le théorème 13 de Whitehead [1].

3) \Rightarrow 4) et 4) \Rightarrow 1) résultent de ce qui précède.

Corollaire: L'espace des lacets itérés n -fois $\Omega^n K$ où K est un C.W. complexe dénombrable a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Ceci résulte du théorème précédent et du théorème de Kuratowski.

Whitehead remarque qu'un compact dominé par C.W. complexe est dominé par un C.W. complexe fini.

En conséquence, un A.N.R. compact est dominé par un polyèdre compact. (Cela résulte d'ailleurs aussi de la démonstration du théorème qui affirme qu'un A.N.R. est dominé par un C.W. complexe.)

Corollaire: L'homologie d'un A.N.R. compact est de type fini. Le groupe fondamental d'un A.N.R. compact est de présentation finie.

On démontre que, sur un A.N.R. compact, toutes les théories de l'homologie satisfaisant l'axiome de dimension coïncident.

(Borsuk, chap. 5.)

Problème : Est-ce qu'un A.N.R. compact X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe fini ?

Remarques: D'après ce qui précède, X a donc le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable, dominé par un C.W. complexe fini.

Or Wall a construit un exemple d'un C.W. complexe dénombrable dominé par un C.W. complexe fini, qui n'a pas le type d'homotopie d'un complexe fini. (Cf. Wall.)

Mais l'exemple de Wall n'implique pas que la réponse au problème précédent soit négative.

Si X est simplement connexe, il n'est pas difficile de voir que la réponse au problème est affirmative.

§ 5. QUELQUES EXEMPLES INTÉRESSANTS

A) On a le théorème suivant, dû à J. H. C. Whitehead.

THÉORÈME: Soient X_1 et X_2 deux A.N.R. compacts (disjoints). Soit $X_0 \subset X_1$ un fermé qui soit aussi un A.N.R. Alors, si $f: X_0 \rightarrow X_2$ est une application continue, l'espace $X = X_1 \cup_f X_2$ est un A.N.R. (compact).

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 5, § 9. Si X_0, X_1, X_2 sont des A.R. compacts, alors $X = X_1 \cup_f X_2$ est aussi un A.R. compact.

Ce théorème permet de construire des A.N.R. ou des A.R. qui ont une allure assez pathologique.

Par exemple : Soient

$X_1 =$ un disque D^q fermé, $q \geq 2$;

$X_0 =$ un segment fermé contenu dans l'intérieur de X_1 ;

$X_2 =$ un disque D^n fermé, $n \geq q+1$;

$f: X_0 \rightarrow X_2$ une application continue surjective.

Alors l'espace $X = X_1 \cup_f X_2$ est un A.R. compact. Il n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial, ou à un C.W. complexe.