Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA «MÉTHODE DE L'HYPERBOLE» DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Autor: Saffari, Bahman

Kapitel: IV. MÉTHODE ANALYTIQUE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42352

du théorème 8, la différence $v_r(x) - d_r x$ étant ainsi équivalente au produit d'une constante par $x^{\frac{1}{r+1}} (\log x)^{-2}$, où r est le plus grand entier α tel que $f(p^\alpha) = 0$.

b) La démonstration du développement asymptotique mentionné cidessus, et a fortiori ceux des théorèmes 5 et 8 (et, pareillement, ceux des théorèmes 1 et 4), peut se faire en n'utilisant le théorème des nombres premiers que sous sa forme asymptotique, c'est-à-dire:

$$\pi(x) = \sum_{r=1}^{k} (r-1)! \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{k+1}}\right].$$

IV. Méthode analytique

La méthode de l'hyperbole, parce qu'elle est élémentaire, a une efficacité limitée (la rédaction complète de la démonstration du théorème 8, faisable pour $m = 2$, devient horrible pour $m \geqq 3$).

H. Delange, par des méthodes analytiques, retrouve tous les résultats contenus dans cet article de façon plus rapide et plus générale, et va beaucoup plus loin. Trois articles à ce sujet [8], [9] et [10] sont à paraître en 1970 dans *Acta Arithmetica.*

Appendice

Nous montrons ici comment on peut retrouver, de façon élémentaire, le résultat de Renyi (et même un peu mieux) et le théorème A de Delange.

Théorème. *Notons toujours par $v_m(x)$ le nombre des $n \leqq x$ tels que $\Omega(n) - \omega(n) = m$. Alors:*

a) *Sans utiliser aucune estimation de $\pi(x)$ [autre que l'estimation banale $\pi(x) = O(x)$], nous avons:*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) *L'estimation de Tchebicheff $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ implique:*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log\log x)^m)$$