Partie II: Algèbres associatives et applications multilinéaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

THÉORÈME. *Soit* (V, μ) *une algèbre de Vinberg et* M *un module sur cette algèbre, avec* λ, ρ *comme actions gauche et droite. L'application* $\hat{\lambda}$, *avec* $\hat{\lambda}(x, m) = \lambda(x, m) - \rho(m, x)$ *munit alors* M *d'une structure de module sur l'algèbre de Lie* $(V, \hat{\mu})$.

L'application de ce théorème à l'exemple précédent donne $\hat{\lambda}(x, \alpha) = [L_x, \alpha]$; i.e. l'une des structures habituelles sur M. Ainsi l'exemple montre que λ, ρ est un raffinement de la structure de module bien connue $\hat{\lambda}$.

Il est alors clair que si M est un module sur une algèbre de Vinberg, il a deux structures de module sur l'algèbre de Lie associée. La première est donnée par le théorème ci-dessus; la seconde est obtenue à partir du théorème en changeant ρ en zéro: cela donne la même structure que celle donnée directement par la condition (5).

On veut espérer avoir une troisième structure de module sur l'algèbre de Lie associée en prenant $\lambda = 0$ – mais cela ne marche pas, car (6) suppose déjà λ. Dans le cas associatif, cependant, cette troisième méthode marche également.

PARTIE II: *Algèbres associatives et applications multilinéaires*

Introduction.

Une classe intéressante de propriétés des algèbres associatives devient accessible si l'on considère les applications multilinéaires dans lui-même de l'espace vectoriel sous-jacent. Le produit μ de l'algèbre fournit un opérateur δ qui associe à une application linéaire d'ordre n une application linéaire d'ordre $n + 1$. On peut exprimer à l'aide de l'opérateur δ des propriétés connues de l'algèbre. En général, les calculs avec δ (comme de prouver que $\delta^2 = 0$) sont assez encombrants. Cependant, en introduisant un « produit de composition » qui associe à tout couple formé d'une application linéaire d'ordre m et d'une application linéaire d'ordre n une application linéaire d'ordre $n + m - 1$, et en prouvant la seule identité (9), on fait presque tout le travail. (Il se trouve que (9) est une version inversée et graduée de l'identité de Vinberg.) Les commutateurs du produit de composition vérifient les axiomes d'une algèbre de Lie graduée. On montre que l'opérateur δ est le commutateur avec l'application produit μ. On définit la cohomologie associée à δ et on expose ses relations vis-à-vis des dérivations et des extensions. Du système des applications multilinéaires la cohomologie hérite d'une structure graduée de Lie. Cette dernière et la cohomologie sont appliquées dans la théorie des déformations des algèbres associatives.

Un exemple simple de déformation illustre comment en pratique marche le mécanisme.

Vu la nature d'exposition de l'article, on a limité les connaissances préliminaires requises à celles de la partie I sans compter quelques facilités à jongler avec les applications multilinéaires.

4. *Le produit de composition.*

Dans cette section nous recherchons, d'un point de vue « plus élevé », la nature de la propriété d'associativité. Des sections de la partie III en feront de même des propriétés caractérisant les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg. La ressemblance frappante de tous ces cas nous permettra d'être beaucoup plus bref dans les deux derniers cas. L'expérience ainsi gagnée avec ces types d'algèbres nous permettra de formuler des critères généraux qui s'appliqueront quand, pour d'autres types d'algèbres, on aura des connaissances analogues.

Soit V un espace vectoriel, μ un produit associatif sur V (nous utiliserons de façon interchangeable $\mu(x, y)$ et xy), et M un module sur (V, μ) d'action gauche λ et d'action droite ρ. (Nous utiliserons xm à la place de $\lambda(x, m)$ et my à la place de $\rho(m, y)$.) Le cas particulier $M = V, \lambda = \rho = \mu$ est très significatif pour les applications.

Supposons que f est une fonction à n variables dont le domaine est V, qui prend ses valeurs dans M, et qui est linéaire par rapport à chaque variable — nous appellerons f une application linéaire d'ordre n de V dans M. Nous pouvons alors associer à f une application linéaire d'ordre $n+1$ de V dans M par une méthode très ingénieuse. On note δf l'application nouvelle; ainsi δ est un opérateur qui augmente les degrés d'une unité. On a

$$\begin{aligned}(\delta f)(x_0, \ldots, x_n) &= x_0 f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_0 x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ &+ f(x_0, x_1 x_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots + (-1)^{n-1} f(x_0, \ldots, x_{n-2}\, x_{n-1}, x_n) + \\ &+ (-1)^n f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}\, x_n) + (-1)^{n+1} f(x_0, \ldots, x_{n-1})\, x_n\,,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(\delta f)(x_0, \ldots, x_n) &= \lambda\big(x_0, f(x_1, \ldots, x_n)\big) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f\big(x_0, \ldots, \mu(x_{i-1}, x_i), \ldots, x_n\big) + \\ &+ (-1)^{n+1} \rho\big(f(x_0, \ldots, x_{n-1}), x_n\big)\,.\end{aligned}$$

Considérons quelques cas particuliers de cette formule.

$n = 0$. Alors f est précisément un élément m de M, et on a

$$(\delta m)(x) = \lambda(x, m) - \rho(m, x) = xm - mx\,.$$

Ainsi $\delta m : V \to M$ est la « dérivation intérieure » de V dans M déterminée par m. A vrai dire, nous avons

$$(\delta m)(xy) = (\delta m)(x)\, y + x\,(\delta m)(y)\,.$$

$n = 1$. Alors f est une application linéaire $V \to M$. Supposons $\delta f = 0$; c'est-à-dire

$$0 = (\delta f)(x, y) = xf(y) - f(xy) + f(x)\, y$$

ou

$$f(xy) = xf(y) + f(x)\, y\,.$$

f est, d'une façon apparente, une dérivation de V dans M.

Comme autre interprétation nous considérons maintenant le cas $M = V$. f est alors une application linéaire de V dans V et, quel que soit le réel t, e^{tf} (donné par une série de puissances) est une application linéaire inversible de V sur V: son inverse est e^{-tf}. On obtient un produit μ_té quivalent (c.-à-d. isomorphe) à μ en posant

$$\mu_t(x, y) = e^{-tf}\, \mu(e^{tf}\, x, e^{tf}\, y)\,. \tag{7}$$

Nous recherchons l'effet dans μ_t d'un changement du premier ordre:

$$\frac{d}{dt}\, \mu_t \mid_{t=o} (x, y) = -f\mu(x, y) + \mu(fx, y) + \mu(x, fy) =$$

$$= -f(xy) + f(x)\, y + xf(y) = (\delta f)(x, y)\,.$$

Cela donne de δf une seconde interprétation comme l'effet du premier ordre dans une famille à un paramètre de structures équivalentes.

$n = 2$. Nous considérons maintenant une famille arbitraire (différentiable) μ_t de structures d'algèbre associative; de telle sorte que, pour tout t, nous avons

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) - \mu_t(\mu_t(x, y), z) = 0\,.$$

Nous différentions à nouveau et prenons $t = 0$ (on pose $\mu_0 = \mu$), notons f pour $\frac{d}{dt}\mu_t \mid t = o$. Nous trouvons

$$f(x, \mu(y, z)) + \mu(x, f(y, z)) - f(\mu(x, y), z) - \mu(f(x, y), z) = 0\,,$$

ou

$$f(x, yz) + xf(y, z) - f(xy, z) - f(x, y)\, z = 0\,.$$

Après un réarrangement des termes, on voit que c'est exactement $\delta f = 0$. Ainsi, les applications bilinéaires f de V dans lui-même (cas $M = V$) vérifiant $\delta f = 0$ sont les « déformations infinitésimales » de μ. Une autre façon d'exprimer cela est que $\mu + tf$ vérifie la condition d'associativité jusqu'aux termes du second ordre (i.e. modulo t^2) si et seulement si $\delta f = 0$. La famille (7) est un cas particulier (famille d'équivalences) des familles de structures associatives. (Noter la différence de la signification de f dans les deux cas!)

Encore une interprétation: ce qu'on appelle le *problème de l'extension*. Le produit semi-direct $W = V \times M$ avec comme produit $\bar{\mu}$ celui défini dans (2) est une algèbre dans laquelle (i) M est un idéal vérifiant $M^2 = 0$ (i.e. $mn = 0$ quels que soient $m, n \in M$) et dans laquelle (ii) le quotient W/M est isomorphe à (V, μ), tandis que (iii) M est un module sur W/M par l'intermédiaire de λ et ρ. Le problème de l'extension consiste à trouver toutes les multiplications $\bar{\mu}'$ de W telles qu'on ait (i), (ii), (iii). Il n'est pas nécessaire que V soit une sous-algèbre de W pour une de ses structures; néanmoins nous continuerons à représenter W comme un espace vectoriel produit de V et de M. Supposons que $\bar{\mu}'$ est un tel produit, alors (i) implique que $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ coïncident sur M (ils valent tous deux zéro); (ii) implique que $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ diffèrent sur V par une application φ à valeurs dans M, tandis que (iii) implique que $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ coïncident quand on les évalue par un élément de $V = W/M$ et un élément de M.

En une formule,

$$\bar{\mu}'\big((x, m), (y, n)\big) = \big(\mu(x, y), \varphi(x, y) + \lambda(x, n) + \rho(m, y)\big).$$

On voit maintenant par un calcul direct que l'associativité de $\bar{\mu}'$ est équivalente à

$$\lambda\big(x, \varphi(y, z)\big) - \rho\big(\varphi(x, y), z\big) + \varphi\big(x, \mu(y, z)\big) - \varphi\big(\mu(x, y), z\big) = 0,$$

c'est-à-dire à $\delta\varphi = 0$. On considère comme équivalentes deux extensions $\bar{\mu}'$ et $\bar{\mu}''$ quand elles sont liées par un automorphisme d'espace vectoriel de W qui induit l'identité sur M et sur W/M. Une telle application F a la forme

$$F(x, m) = \big(x, m + f(x)\big), \qquad \text{avec} \qquad f: V \to M.$$

L'application inverse est $F^{-1}(x, m) = (x, m - f(x))$. Les structures équivalentes à $\bar{\mu}$ sont ainsi

$$\bar{\mu}'\big((x, m), (y, n)\big) = F^{-1}\bar{\mu}\big(F(x, m), F(y, n)\big) =$$

$$= F^{-1}\bar{\mu}\big((x, m + f(x)), (y, n + f(y)\big) =$$

$$= F^{-1}(\mu(x,y), \lambda(x, n+f(y)) + \rho(m+f(x), y)) =$$

$$= (\mu(x,y), -f(\mu(x,y)) + \lambda(x,n) + \lambda(x,f(y)) + \rho(m,y) + \rho(f(x),y)).$$

Ainsi, dans ce cas,

$$\varphi(x,y) = -f(\mu(x,y)) + \lambda(x,f(y)) + \rho(f(x),y) = (\delta f)(x,y).$$

De ces exemples émerge une certaine idée. Dans chacun des exemples est un problème dont la solution α est n'importe quelle solution de $\delta x = 0$. Parmi les solutions certaines moins intéressantes sont de la forme $\alpha = \delta\beta$. Cela suggère $\delta^2\beta = 0$. A vrai dire, cela peut se vérifier — nous le ferons plus tard. Cependant, une vérification directe serait maintenant extrêmement laborieuse, et on peut s'attendre au même phénomène pour d'autres calculs. Aussi introduisons nous certaines notations comme outil pour les mener à bien.

Pour le moment nous considérons un espace vectoriel V mais ne supposons pas qu'il ait quelque structure d'algèbre. Nous prenons pour f une application linéaire d'ordre n de V dans V et de façon analogue pour g une application linéaire d'ordre m de V dans V. (En fait, g peut prendre ses valeurs dans n'importe quel espace vectoriel.) Nous définissons le *produit de composition* $g \bar{o} f$ qui est une application linéaire d'ordre $n + m - 1$ par

(8) $$(g \bar{o} f)(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(n-1)} g(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_i, \ldots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \ldots, x_{n+m-1})$$

Cette définition est motivée par la suite.

Application 1. Soit μ une application bilinéaire de V dans V; on a alors

$$(\mu \bar{o} \mu)(x,y,z) = \mu(\mu(x,y),z) - \mu(x,\mu(y,z)).$$

Ainsi $\mu \bar{o} \mu = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que μ définisse sur V une structure d'algèbre associative.

Application 2. Soit f une application linéaire d'ordre n de V dans V, et μ une structure associative sur V. Alors, à l'aide de la formule donnant δf (avec $\lambda = \rho = \mu$) on trouve

$$\delta f = (-1)^{n+1} \mu \bar{o} f - f \bar{o} \mu.$$

$-f \bar{o} \mu$ correspond à la somme des termes « du milieu »; $(-1)^{n+1} \mu \bar{o} f$ aux termes « extrêmes ».

Nous avons ainsi montré que l'introduction de $\bar{o}$ conduit à une notation plus courte. Pour calculer avec elle, nous avons besoin de quelques propriétés.

THÉORÈME. *Soit f, g, h des applications linéaires d'ordre n, m, p de V dans lui-même. On a alors l'identité suivante*

(9) $(f \bar{o} g) \bar{o} h - f \bar{o} (g \bar{o} h) = (-1)^{(m-1)(p-1)} \{ (f \bar{o} h) \bar{o} g - f \bar{o} (h \bar{o} g) \}$.

En particulier, pour $n = 1$ alors $f \bar{o} g = f o g$ et les deux côtés de (9) valent zéro. Pour $n = 0$, alors $f \bar{o} g = 0$.

L'identité (9) ressemble beaucoup à l'identité de Vinberg (1), excepté en ce qui concerne l'ordre inverse des facteurs et la puissance de (-1) qui reflète la graduation. Nous espèrerons donc aussi quelques propriétés analogues.

Pour prouver (9), on a besoin de quelque patience, d'une grande feuille de papier, d'un crayon pointu et d'une bonne lumière. Cependant l'effort sera récompensé puisque c'est l'un des quelques théorèmes dont la preuve est un peu pénible. Nous indiquons ici la méthode, laissant les détails comme les puissances de (-1) nécessaires aux soins du lecteur.

Dans la définition (8) de $f \bar{o} g$, la fonction g « visite » tous les espaces possibles sur f, avec des signes appropriés. Quand $\bar{o}\, h$ est ensuite appliqué sur la droite, alors h « visite » tous les espaces possibles de $f \bar{o} g$. Dans certains termes h occupera un espace possible de f; dans d'autres un espace possible de g. Les derniers termes constituent exactement $f \bar{o} (g \bar{o} h)$; dans les termes restants (les premiers) g et h occupent tous deux des espaces possibles de f. Un observateur plus fin trouvera dans ces termes une certaine symétrie en g et h. — Les détails sont laissés au lecteur...

Les commutateurs des produits de composition forment une algèbre de Lie graduée. Pour fixer la terminologie, nous appellerons $n - 1$ le *degré réduit* d'une application linéaire d'ordre n; le degré « ordinaire » est n.

THÉORÈME. *Si f, g sont des applications linéaires d'ordre n et d'ordre m de l'espace vectoriel V dans lui-même (les degrés réduits valent n − 1 resp. m − 1), et si*

$$[f, g]^\circ = g \bar{o} f - (-1)^{(n-1)(m-1)} f \bar{o} g$$

alors $[\,,]^\circ$ *est, par rapport à la graduation réduite, une structure d'algèbre de Lie graduée sur l'espace des applications multilinéaires. C'est-à-dire*

(i) $[f, g]^\circ$ *est une application linéaire d'ordre* $n + m - 1$ *(de degré réduit* $n+m-2$*) qui dépend linéairement de f et de g.*

(*ii*) $$[f, g]^\circ = (-1)^{(m-1)(n-1)+1} [g, f]^\circ .$$

Si h est une application linéaire d'ordre p, alors

$$(iii) \quad (-1)^{(n-1)(p-1)}[[f,g]^\circ, h]^\circ + (-1)^{(m-1)(n-1)}[[g,h]^\circ, f]^\circ + \\ + (-1)^{(p-1)(m-1)}[[h,f]^\circ, g]^\circ = 0 .$$

La preuve de (iii) (identité de Jacobi) est la même que celle du théorème de la section 2, excepté qu'il faut veiller aux signes. — Notons l'ordre inhabituel des facteurs dans la définition de $[\,,]^\circ$; il reflète le fait que, d'un certain point de vue, l'ordre des facteurs dans $f \bar{\circ} g$ est l'ordre « erroné ».

Des conséquences immédiates du théorème sont par exemple les suivantes:

$$\delta f = -[\mu, f]^\circ, \quad \mu \bar{\circ} \mu = \tfrac{1}{2}[\mu,\mu]^\circ;$$

l'identité de Jacobi donne, elle,

$$\delta^2 f = [\mu, [\mu, f]^\circ]^\circ = \tfrac{1}{2}[[\mu,\mu]^\circ, f]^\circ = 0$$

lorsque μ est associatif. L'identité de Jacobi donne aussi

$$(10) \qquad \delta[f,g]^\circ = [\delta f, g]^\circ + (-1)^{n-1}[f, \delta g]^\circ .$$

5. *Cohomologie.*

Dans la section précédente nous avons vu un exemple de la situation suivante: on a un système $(C^n)_{n=-\infty}^{\infty}$ d'espaces vectoriels (ou de modules si on aime la généralité) et une application linéaire δ qui envoie chaque C^n dans C^{n+1} telle que $\delta^2 = 0$. Nous pouvons ainsi prendre pour C^n l'espace des applications linéaires d'ordre n de V dans V pour $n \geqq 0$ et $C^n = \{0\}$ pour $n < 0$. On peut représenter la situation par la suite

$$0 \xrightarrow{\delta} C^\circ \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^{n-1} \xrightarrow{\delta} C^n \xrightarrow{\delta} C^{n+1} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

A chaque C^n est associée une application entrante δ, dont on note B^n l'image (de telle sorte que $B^n = \delta C^{n-1}$) et une application sortante δ, dont on note le noyau (ensemble des zéros) par Z^n. Le fait que $\delta^2 = 0$ dit que B^n est un sous-espace de Z^n. Les deux sections précédentes contiennent certaines illustrations de ce que B^n et Z^n signifient pour les petites valeurs de n dans le cas des algèbres associatives.

La suite ci-dessus est appelée *exacte en* C^n si $B^n = Z^n$; elle est dite *exacte* si elle est exacte en C^n pour tout n. Comme mesure du défaut d'exactitude de la suite on introduit selon la coutume les quotients $H^n = Z^n/B^n$. On les appelle les *groupes de cohomologie*; dans la situation présente les groupes sont en réalité des espaces vectoriels. Z^n et B^n sont appelés les espaces de *cocycles* resp. de *cobords*. Dans le cas d'une algèbre V, comme dans la section antérieure, on écrit $H^n(V, V)$: c'est « la cohomologie de V à coefficients dans V». Plus généralement, quand M est un module sur V, on a les groupes de cohomologie $H^n(V, M)$ de V à coefficients dans M. Nous les décrirons brièvement.

Dans certaines situations, comme par exemple celle de la section précédente on a des applications bilinéaires (les produits) $C^n \times C^m \to C^p$ (dans notre cas, le produit est donné par $[\,,]^\circ$ et $p = n + m - 1$), et δ est une dérivation par rapport au produit (dans notre cas voir (10)). Alors quand on applique δ au produit de deux cocycles on obtient zéro; ainsi le produit de deux cocycles est un cocycle. De façon analogue, le produit d'un cocycle et d'un cobord est un cobord. (Prendre dans (10) pour g un cocycle et pour δf un cobord. Alors le dernier terme disparaît de sorte que $[\delta f, g]^\circ$ est égal au premier terme qui est un cobord.) Ainsi, les produits avec la propriété de dérivation induisent pour les groupes de cohomologie des produits $H^n \times H^m \to H^p$ puisque le produit de deux cocycles est changé seulement d'un cobord quand on change d'un cobord les facteurs. En particulier, dans la situation de la section 4, on a des produits

$$H^n(V, V) \times H^m(V, V) \to H^{n+m-1}(V, V),$$

produits qu'on note également $[,]^\circ$. On a aussi une structure de Lie graduée puisque toutes les propriétés qu'on peut décrire par des équations se généralisent quand les opérations des équations se généralisent.

Dans le cas général de $H^n(V, M)$, nous avons déjà décrit les espaces C^n et l'application δ au début de la section 4. Tout ce qui nous reste à faire est de prouver $\delta^2 = 0$ ce qui jusqu'ici n'a été fait que pour $M = V$. A cette fin, nous considérons à nouveau le produit semi-direct $W = V \times M$. Soit f un élément de C^n, i.e. une application linéaire d'ordre n de V dans M; on associe à f une application $\bar{f}$ linéaire d'ordre n de W dans W par le procédé évident « d'extension »

$$\bar{f}((x_1, m_1), \ldots, (x_n, m_n)) = (0, f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Notons que $f = 0$ si et seulement si $\bar{f} = 0$. Le produit dans W est encore noté $\bar{\mu}$ (quoique $\bar{\mu}$ n'est pas obtenu à partir de μ comme $\bar{f}$ l'est à partir de f; $\bar{\mu}$ contient aussi λ et ρ). On invite le lecteur à vérifier que $\bar{\mu}\ \bar{o}\ \bar{f}$ et $\bar{f}\ \bar{o}\ \bar{\mu}$ tous les deux ont la propriété de valoir zéro chaque fois qu'une de leurs entrées vient du facteur M et que les valeurs sont toujours dans le facteur M. Une recherche soigneuse montrera, en fait, que $\delta\bar{f}$ (qui est une application linéaire d'ordre $n + 1$ de W dans W) est juste la même chose que la fonction obtenue en « étendant » δf. C'est-à-dire $\delta \bar{f} = \overline{\delta f}$. Cela implique $\delta^2 \bar{f} = \overline{\delta^2 f} = 0$, donc $\delta^2 f = 0$.

Les exemples discutés dans la section 3 ont les interprétations cohomologiques suivantes:

V est une algèbre associative, M un V-module.

Exemple 1. $B^1(V, M)$ est l'espace des dérivations intérieures de V dans M. $Z^1(V, M)$ est l'espace de toutes les dérivations de V dans M. L'espace quotient $H^1(V, M)$ mesure à quel point il y a d'autres dérivations que les dérivations intérieures.

Exemple 2. $B^2(V, V)$ est l'ensemble de toutes les déformations infinitésimales du produit μ obtenues par une famille de transformations inversibles de V. Ces déformations en réalité ne déforment rien; elles effectuent simplement un changement de base. $Z^2(V, V)$ est l'espace de toutes les déformations infinitésimales. Le quotient $H^2(V, V)$ mesure à quel point il y a de vraies déformations infinitésimales. Dans la section suivante nous verrons que $H^3(V, V)$ détermine à quel point une déformation infinitésimale appartient réellement à une famille de déformations. Par exemple c'est toujours le cas pour $H^3(V, V) = 0$.

Exemple 3. Quand dans l'exemple 1 nous prenons $M = V$ alors $B^1(V,V)$ est une algèbre de Lie par rapport au produit $[\,,]^\circ$. C'est l'algèbre de Lie du groupe des opérations $b \mapsto aba^{-1}$ (automorphismes intérieurs) de l'algèbre, où a est un élément inversible quelconque. (S'il n'y a pas d'unité dans V, on peut prendre $b \mapsto (I+a)\, b\, (I+a)^{-1}$ où a est tel que la multiplication gauche comme la multiplication droite par $I + a$ est inversible.) $Z^1(V, V)$ est aussi une algèbre de Lie, à savoir celle du groupe de tous les automorphismes. Comme le premier groupe est normal dans le dernier, le quotient est un groupe. Son algèbre de Lie est juste $H^1(V, V)$ avec le produit induit par $[\,,]^\circ$.

Exemple 4. $H^2(V, M)$ mesure l'existence d'extensions de V par M à une équivalente près. L'ensemble de toutes les extensions est paramétrée par $Z^2(V, M)$;les extensions inessentielles par $B^2(V, M)$.

6. *Déformations d'algèbres associatives.*

Dans la section 4, nous avons déjà discuté brièvement le concept de déformation infinitésimale d'une algèbre associative V (cf. le cas $n = 2$); dans le cas $n = 1$ nous avons identifié les déformations infinitésimales dues à une famille de transformations inversibles de V. Dans la section 5, exemple 2, nous avons indiqué la relation avec la cohomologie. Nous allons maintenant recommencer en utilisant les opérations $\bar{o}$ et $[\,,]^\circ$ et leurs propriétés y compris leurs relations avec la cohomologie. Au cours des calculs nous essayerons de montrer l'efficacité de $\bar{o}$ et de $[,]^\circ$ à accomplir les opérations essentielles.

La condition que μ est une multiplication associative de l'espace vectoriel V s'exprime par $\mu \,\bar{o}\, \mu = 0$. Supposons que $\mu + \varphi$, où φ est une application linéaire de V dans V, est aussi associatif; alors

$$0 = (\mu+\varphi)\,\bar{o}\,(\mu+\varphi) = \mu\,\bar{o}\,\mu + \mu\,\bar{o}\,\varphi + \varphi\,\bar{o}\,\mu + \varphi\,\bar{o}\,\varphi =$$
$$= -\,\delta\varphi + \tfrac{1}{2}[\varphi,\varphi]^\circ,$$

ou

$$(11) \qquad \delta\varphi - \tfrac{1}{2}[\varphi,\varphi]^\circ = 0\,.$$

C'est l'équation de déformation. Nous serons intéressés à trouver toutes les « petites » solutions φ de cette équation.

Il existe diverses méthodes pour résoudre (11). La méthode des séries formelles de puissances est intuitivement la plus simple, quoique pas toujours la plus pratique dans les situations réelles. Nous posons donc

$$\varphi = t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + t^3\varphi_3 + \ldots$$

et substituons dans (11). (A strictement parler, t est une « variable » dans un sens technique. Si l'on permet de considérer des séries de puissances en t dont les coefficients sont des applications bilinéaires, on est obligé de façon analogue de considérer des séries de puissances en t dont les coefficients sont des applications multilinéaires quelconques ou des nombres réels quelconques. Nous n'entrerons pas dans les détails et passerons tant bien que mal à travers tout cela aussi bien que nous le pourrons.) La suite suivante d'équations apparaît quand on annule les coefficients des puissances de t.

$$\delta\varphi_1 = 0$$
$$\delta\varphi_2 - \tfrac{1}{2}[\varphi_1,\varphi_1]^\circ = 0$$
$$\delta\varphi_3 - [\varphi_1,\varphi_2]^\circ = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta\varphi_{n+1} - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i,\varphi_{n+1-i}]^\circ = 0$$

Ainsi, il est nécessaire que φ_1 soit un cocycle. Les résultats de la section 5 impliquent que, alors, $\frac{1}{2}[\varphi_1,\varphi_1]^\circ$ est aussi un cocycle, donc représente une classe de cohomologie dans $H^3(V, V)$. Si cette classe (appelée l'obstruction première) vaut zéro, alors $\frac{1}{2}[\varphi_1,\varphi_1]^\circ$ est un cobord, et on peut trouver φ_2.

Naturellement, φ_2 est unique à quelque chose dont le δ vaut zéro i.e. à un cocycle près. Si l'on peut trouver φ_2, on peut continuer avec φ_3. Nous allons montrer que à chaque étape nous trouvons un cocycle pour l'expression à laquelle le $\delta\varphi$ suivant doit être égal. Si cette expression est un cobord ou si on peut en faire un cobord en modifiant d'un cocycle le φ précédent, alors nous pouvons considérer le pas suivant.

Ainsi supposons que l'on a trouvé $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$; i.e. qu'en posant

$$\varphi = t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \ldots + t^n\varphi_n + t^{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots$$

(les φ_{n+1} et les coefficients suivants sont arbitraires)

on a

$$[\mu+\varphi, \mu+\varphi]^\circ = t^{n+1}F_{n+1} + \ldots$$

avec

$$F_{n+1} = -2\delta\varphi_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} [\varphi_i, \varphi_{n+1-i}]^\circ .$$

A cause de l'identité de Jacobi pour les algèbres de Lie graduées nous obtenons (3 termes sont égaux !)

$$0 = [\mu+\varphi, [\mu+\varphi, \mu+\varphi]^\circ]^\circ = [\mu+t\varphi_1+\ldots, t^{n+1}F_{n+1}+\ldots]^\circ =$$
$$= t^{n+1}[\mu, F_{n+1}]^\circ + \ldots$$

Comme le coefficient de t^{n+1} doit être zéro, on obtient

$$0 = [\mu, F_{n+1}]^\circ = -\delta F_{n+1} = -\delta \sum_{i=1}^{n} [\varphi_i, \varphi_{n+1-i}]^\circ$$

qui est ce que nous voulons montrer: l'expression à laquelle $\delta\varphi_{n+1}$ doit être égale est toujours un cocycle. C'est seulement si sa classe de cohomologie (« l'obstruction d'ordre n ») s'évanouit qu'on peut trouver φ_{n+1}. — Nous voyons que $H^3(V, V) = 0$ entraîne que chaque cocycle φ_1 peut « s'étendre » à une famille à un paramètre de déformations.

Par souci de généralité, nous considérons brièvement une série pour φ qui commence à un terme d'ordre plus grand:

$$\varphi = t^k\varphi_k + t^{k+1}\varphi_{k+1} + \ldots \qquad (k>1) .$$

Alors, en substituant dans (11), on montre comme auparavant que non seulement φ_k mais aussi $\varphi_{k+1}, ..., \varphi_{2k-1}$ sont des cocycles.

L'« apparence » d'une famille de déformations peut changer quand on la compose avec une famille $F_t = I + tf_1 + t^2f_2 + \ldots$ de transformations inversibles de V; $f_1, f_2, \ldots$ sont ici des applications linéaires $V \to V$ et on peut calculer F_t terme par terme, par exemple les premiers termes sont

$$F_t^{-1} = I - tf_1 + t^2(-f_2 + f_1^2) + t^3(-f_3 + f_1 f_2 + f_2 f_1 - f_1^3) + \ldots$$

La déformation modifiée est donnée par

$$\mu_t'(x, y) = F_t^{-1} \mu_t(F_t x, F_t y) = F_t^{-1} \mu(F_t x, F_t y) + F_t^{-1} \varphi(F_t x, F_t y).$$

Supposons que la série de puissances de φ commence comme ci-dessus par t^k ($k \geqq 1$) et décidons de la composer avec un F_t qui commence à la même puissance: $F_t = I + t^k f_k + \ldots$ On trouve alors

$$\mu_t'(x, y) = \mu(x, y) + t^k(-f_k \mu(x, y) + \mu(f_k x, y) + \mu(x, f_k y)) + \\ + t^k \varphi_k + \ldots$$

où les points indiquent les termes d'ordre plus grand que k. Ainsi, en posant $\varphi' = \mu_t' - \mu$, on a

$$\varphi' = t^k(-\delta f_k + \varphi_k) + \ldots;$$

autrement dit, étant donné une famille de déformations de μ, on peut par le choix de F_t changer d'un cobord arbitraire le terme principal de l'expansion en série de puissances. En ce sens, seule la classe de cohomologie du terme principal « compte ». En particulier, si le terme principal est un cobord, on peut le changer en zéro par un choix convenable de F_t. Comme corollaire, si $H^2(V, V) = 0$, chaque terme principal, étant un cocycle, est en fait un cobord et peut être changé en zéro. Nous pouvons montrer que, en fait, on peut alors trouver une famille F_t telle que le φ' final est zéro c'est-à-dire qu'on a le

THÉORÈME. *Si* $H^2(V, V) = 0$, *alors toute famille* μ_t *de déformations d'une structure associative* μ *est triviale si c'est une famille à un paramètre comme série formelle de puissances. i.e. existe une famille* F_t *de transformations inversibles de l'espace vectoriel sous-jacent développables en séries formelles de puissances à un paramètre telle que*

$$\mu_t(x, y) = F_t^{-1} \mu(F_t x, F_t y).$$

(Dans ce cas, on dit que μ est *rigide*)

La seconde méthode pour résoudre (11) est à vrai dire la méthode classique utilisée dans la résolution des équations linéaires — on exprime certaines des inconnues au moyen d'autres, les paramètres. Dans ce cas, cependant, les équations ne sont pas linéaires et il peut y avoir en pratique des difficultés à trouver explicitement les solutions.

La méthode est fondée sur deux idées: (i) partager (11) en trois ensembles d'équations et les résoudre consécutivement, (ii) choisir les paramètres les plus favorables. Les deux buts sont atteints en observant qu'on peût décomposer l'espace des applications linéaires d'ordre n de V dans V en une somme directe de trois sous-espaces. Le premier est B^n, l'espace des cobords, le second nous l'appellerons (par abus de notation) H^n; c'est tout sous-espace de Z^n complémentaire de B^n, il est isomorphe à $H^n(V,V)$. Le troisième U^n est complémentaire de Z^n, de telle sorte que l'espace en entier est la somme directe de Z^n et de U^n. La décomposition est ainsi $B^n + H^n + U^n$, ou $Z^n + U^n$, comme le dictera la nécessité. Les applications de projection correspondantes sont notées π_B, π_H et π_U.

L'équation (11) se partage maintenant comme il suit:

$$(11') \qquad \begin{aligned} a) \quad & \delta\varphi - \tfrac{1}{2}\pi_B[\varphi,\varphi]^\circ = 0 \\ b) \quad & \pi_H[\varphi,\varphi]^\circ = 0 \\ c) \quad & \pi_U[\varphi,\varphi]^\circ = 0 \end{aligned}$$

En se rappelant l'origine de (11), nous voyons que (11'.c) est équivalent à

$$(11'.c') \qquad \pi_U[\mu+\varphi, \mu+\varphi]^\circ = 0\,.$$

Nous l'utiliserons sous cette forme.

Dans (11'.a) posons $\varphi = z + u$, où $z \in Z^2$ et $u \in U^2$, et considérons z comme un paramètre. (11'.a) devient alors, puisque $\delta z = 0$

$$(11'.a') \qquad \delta u - \tfrac{1}{2}\pi_B[z+u, z+u]^\circ = 0\,.$$

Le côté gauche note, pour chaque z, une application qui envoie $u \in U^2$ dans un cobord de B^3. Pour $z = 0$, cette application est justement $u \mapsto \delta u$ qui est un isomorphisme entre U^2 et B^3. Le théorème des fonctions implicites nous dit alors que pour un petit z on peut trouver un voisinage de $u = 0$ qui est appliqué de manière biunivoque sur un ensemble ouvert de B^3 et que l'origine de B^3 est dans l'image. Désignons par $\Phi(z)$ l'image inverse de 0; ainsi $u = \Phi(z)$ est une solution de (11'.a'). Le théorème des fonctions implicites nous dit que Φ paramétrise toutes les solutions petites $\varphi = z + \Phi(z)$ et que Φ est analytique.

Nous substituons maintenant $\varphi = z + \Phi(z)$ dans (11'.b). Malheureusement on n'a aucune garantie que l'équation qui en résulte

$$(11'.b') \qquad \Omega(z) =_{def} \pi_H[z+\Phi(z), z+\Phi(z)]^\circ = 0$$

a de nombreuses solutions. Cette équation correspond aux obstructions que nous avons trouvées dans la méthode des séries de puissances. C'est pourquoi, on appelle Ω *l'application obstruction.*

En ce qui concerne la troisième équation (11'.c'), les choses vont mieux: pour les petits φ c'est une conséquence des deux premières équations (11'a, b), qu'il n'y a pas de conditions supplémentaires. Cela correspond au fait que dans la méthode des séries de puissances, F_{n+1} est automatiquement un cocycle. Pour prouver cela, nous avons seulement à montrer ce qui suit: si φ est tel que $w = [\mu+\varphi, \mu+\varphi]^\circ$ appartient à U^3 et si φ est petit, alors $w = 0$. Grâce à l'identité de Jacobi et avec les hypothèses faites nous avons

$$0 = [\mu+\varphi\,, [\mu+\varphi, \mu+\varphi]^\circ]^\circ = [\mu+\varphi, w]^\circ\,.$$

Or, on peut prendre pour w n'importe quel élément de U^3 pour lequel $[\mu+\varphi, w]^\circ = 0$ et nous montrons que c'est zéro quand φ est petit. Or $w \mapsto [\mu, w]^\circ = -\,\delta w$ est une application de U^3 dans l'espace des applications linéaires d'ordre 4 qui est une injection. Un changement: remplacer $[\mu, .]^\circ$ par $[\mu+\varphi, .]^\circ$ ne change pas la propriété (biunivoque) de l'injection quand φ est petit. (Le rang d'une application linéaire ne diminue pas par un petit changement.) Par suite, il y a dans U^3 un seul w pour lequel $[\mu+\varphi, w]^\circ = 0$ quand φ est petit; la seule valeur est évidemment $w = 0$.

Ainsi, toutes les petites solutions de (11) sont de la forme $\varphi = z + \Phi(z)$, où Φ est analytique dans un voisinage du 0 de Z^2 et où de plus z est limité par la condition $\Omega(z) = 0$; Ω est aussi analytique à valeurs dans H^3. (Notons que $H^3(V, V) = 0$ entraîne que les petites solutions φ de (11) forment une variété locale sans singularités; son espace tangent est Z^2.)

Pour considérer les équivalences parmi les déformations, nous observons que dans le cas où $\alpha : V \to V$ est inversible il lui correspond une transformation sur une multiplication μ' donnée par $\mu'(x, y) = \alpha^{-1}\mu(\alpha x, \alpha y)$.

De façon analogue, à toute application, linéaire d'ordre n, f correspond une nouvelle application appelée $\sigma(\alpha)f$:

$$\big(\sigma(\alpha)f\big)(x_1, \dots, x_n) = \alpha^{-1}f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)\,.$$

On a $\mu' = \sigma(\alpha)\,\mu$. Il est facile de voir à partir de la définition de $\bar{o}$ que

$$\sigma(\alpha)(f\,\bar{o}g) = \sigma(\alpha)f\,\bar{o}\,\sigma(\alpha)g\,.$$

Ainsi, si on a $\mu\,\bar{o}\,\mu = 0$, on a aussi $\sigma(\alpha)\,\mu\,\bar{o}\,\sigma(\alpha)\,\mu = 0$. (Cela exprime le fait évident que des algèbres isomorphes à des algèbres associatives sont elles-mêmes associatives.) Si α est près de l'application identité I, α est de la forme e^β, où β est une application linéaire.

Lemme. Si $\beta : V \to V$ est linéaire et si f est une application linéaire d'ordre n de V dans V, alors

$$\sigma(e^{\beta})f = e^{\delta\beta}f,$$

où $\delta_\beta f = [\beta, f]^\circ$.

Pour montrer cela, nous remplaçons β par $t\beta$ et nous différentions par rapport à t. Vu la définition de σ on a

$$\frac{d}{dt}\,\sigma(e^{t\beta})f = -\beta\,\bar{o}\,\sigma(e^{t\beta})f + \sigma(e^{t\beta})f\,\bar{o}\,\beta = [\beta, \sigma(e^{t\beta})f]^\circ = \delta_\beta\sigma(e^{t\beta})f.$$

Or $\frac{d}{dt}$ et δ_β commutent puisque β est indépendant de t et nous trouvons

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^N \sigma(e^{t\beta})f = \delta_\beta^N\,\sigma(e^{t\beta})f.$$

Si l'on pose $t = 0$ c'est le coefficient de $\frac{tN}{N!}$ dans le développement en série de Taylor de $\sigma(e^{t\beta})f$. Pour $t = 0$, le côté droit coïncide avec $\delta_\beta^N f$. Ainsi nous trouvons

$$\sigma(e^{t\beta})f = \sum_{N=o}^{\infty} \frac{t^N}{N!}\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^N \sigma(e^{t\beta})f\right\}_{t=0} = \sum_{N=o}^{\infty}\frac{t^N}{N!}\,\delta_\beta^N f = e^{t\delta\beta}f.$$

Il suffit de faire $t = 1$ pour prouver le lemme.

Comme pour la notation δ, on peut poser $\delta_g f = [g, f]^\circ$. On a alors $\delta_\mu f = [\mu, f]^\circ = -\delta f$ de sorte que $\delta = -\delta_\mu$. Notons aussi que

$$\delta_\beta\mu = [\beta, \mu]^\circ = -[\mu, \beta]^\circ = \delta\beta.$$

L'action d'un opérateur $\sigma(e^\beta)$ sur μ donne quelque chose qui dépend du choix de β. Pour $\beta \in Z^1(V, V)$ on a $\delta\beta = \delta_\beta\mu = 0$ de telle sorte que $\sigma(e^\beta) = e^\delta\beta\,\mu = \mu$; i.e. μ ne change pas. Pour $\beta \in Z^1(V, V)$, les e^β appartiennent au groupe d'automorphismes de μ. On peut ainsi voir que les e^β pour $\beta \in U^1$ sont à vrai dire les seuls intéressants si l'on veut que μ « bouge ». Comme alors $\delta_\beta\mu$ n'est jamais zéro (excepté pour $\beta = 0$), les éléments $\sigma(e^\beta)\,\mu$, $\beta \in U^1$, sont tous distincts l'un de l'autre pour β petit et forment en μ une variété locale dont l'espace tangent est $B^2 = \delta U^1$. Quand μ' est distinct de μ mais proche de μ, l'ensemble des $\sigma(e^\beta)\,\mu'$ pour $\beta \in U^1$ proche de 0 forme aussi une variété locale dont l'espace tangent en μ' est proche de B^2. Ainsi on voit intuitivement que pour μ' près de μ et β

dans un voisinage de 0 contenu dans U^1 toutes les orbites $\sigma(e^\beta)\,\mu'$ se couperont en μ suivant un sous-espace transversal à B^2. (Les considérations précédentes sont purement intuitives; le théorème des fonctions implicites fournit la preuve actuelle.) Ainsi si nous prenons le plan P passant par μ dans la direction de $H^2 + U^2$, alors P contient en particulier au moins un point de l'ensemble des $\sigma(e^\beta)\,\mu'$ pour tous les μ' proches de μ. Les μ' associatifs dans P ont, cependant, justement la forme $\mu + z + \Phi(z)$ où z est réduit à H^2 et vérifie $\Omega(z) = 0$. Les μ' considérés représentent toutes les classes d'équivalence des multiplications associatives proches de μ et, comme nous le voyons, sont paramétrés par les zéros d'une application analytique Ω de H^2 à valeurs dans H^3.

De façon plus explicite: chaque structure associative μ' proche de μ est de la forme $\mu' = \sigma(e^\beta)\big(\mu+z+\Phi(z)\big)$ où z appartient à un voisinage de 0 contenu dans H^2 et vérifie $\Omega(z) = 0$ tandis que β appartient à un voisinage de 0 contenu dans U^1.

Dans le cas particulier où $H^2(V, V) = 0$ cela signifie qu'il y a seulement *une* classe d'équivalence: celle de μ. C'est-à-dire que toutes les multiplications associatives proches de μ sont équivalentes à μ. C'est une autre forme du théorème de rigidité.

On doit remarquer que bien que $\sigma(e^\beta)\,\mu = \mu$ pour $\beta \in Z^1$, en général $\sigma(e^\beta)\,\mu' \neq \mu'$ pour μ' proche de μ et pour le même β. Pour trouver les équivalences entre les μ' proches de μ on n'a pas pris les transformations en considération. Comme résultat, on peut en général trouver leurs équivalents parmi les μ' de P.

7. *Un exemple simple.*

Nous calculerons les petites déformations de l'algèbre associative à deux dimensions V dont les éléments sont de la forme $a + b\varepsilon$, où a et b sont réels et $\varepsilon^2 = 0$. Une base de V sur les nombres réels est constituée par les éléments 1 et ε. Soit $f : V \to V$ une application linéaire, δf est donnée par

$$(\delta f)(1,1) = 1\,.f(1) - f(1.1) + f(1)\,.\,1 = f(1),$$

$$(\delta f)(1,\varepsilon) = (\delta f)(\varepsilon,1) = 1\,.f(\varepsilon) - f(1.\varepsilon) + f(1)\,.\,\varepsilon = \varepsilon f(1),$$

$$(\delta f)(\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon\,.f(\varepsilon) - f(\varepsilon.\varepsilon) + f(\varepsilon)\,.\,\varepsilon = 2\varepsilon f(\varepsilon).$$

Par suite, f est une dérivation si $f(1) = 0$ et si $f(\varepsilon)$ est un multiple de ε. L'espace $Z^1 = H^1$ des dérivations est à une dimension et une base en est donnée par l'élément ζ avec

$$\zeta(a + b\varepsilon) = b\varepsilon\,.$$

Soit maintenant une application bilinéaire φ. On peut alors calculer $\delta\varphi$ de façon analogue. Cependant nous savons déjà que $\delta(\delta f) = 0$ quand f est linéaire. Aussi pouvons nous restreindre φ à un sous-espace W complémentaire à B^2 et dont les éléments ont la propriété que $\varphi(1, 1) = 0$ et $\varphi(\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbf{R}$. Pour ces φ là, on trouve

$$(\delta\varphi)(1,1,1) = (\delta\varphi)(1,\varepsilon,1) = (\delta\varphi)(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) = 0\,,$$

$$(\delta\varphi)(1,1,\varepsilon) = \varphi(1,\varepsilon)\,,(\delta\varphi)(\varepsilon,1,1) = -\varphi(\varepsilon,1)\,,$$

$$(\delta\varphi)(1,\varepsilon,\varepsilon) = -\varepsilon\varphi(1,\varepsilon)\,,(\delta\varphi)(\varepsilon,\varepsilon,1) = -\varphi(\varepsilon,1)\,,$$

$$(\delta\varphi)(\varepsilon,1,\varepsilon) = \varepsilon\big(\varphi(1,\varepsilon) - \varphi(\varepsilon,1)\big)\,.$$

Les φ pour lesquels $\delta\varphi = 0$ donnent H^2. Ils sont caractérisés par $\varphi(1, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon, 1) = 0$ — et naturellement $\varphi(1, 1) = 0$ et $\varphi(\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbf{R}$. Donc H^2 est à une dimension et est engendré par l'application z avec $z(\varepsilon, \varepsilon) = 1$, z étant nul pour toutes les autres paires d'éléments de la base. Pour ce z, on a $z \,\bar{o}\, z = 0$. Si $\varphi = z + u$ est une solution de (11), alors on a dans ce cas

$$\delta u + (z \,\bar{o}\, u + u \,\bar{o}\, z + u \,\bar{o}\, u) = 0\,,$$

qui est vérifié pour $u = 0$. Ainsi si t est un paramètre réel, les multiplications déformées sont $\mu' = \mu + tz$; i.e.

$$\mu'(a + b\varepsilon, c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\,\varepsilon + t\,.\,bd\,,$$

ou encore

$$\mu'(1,1) = 1\,,\quad \mu'(1,\varepsilon) = \mu'(\varepsilon,1) = \varepsilon\,,\quad \mu'(\varepsilon,\varepsilon) = t\,.$$

On distingue $t > 0$ et $t < 0$ en posant $t = \pm k^2$. Avec le nouvel élément de base $\varepsilon' = \varepsilon/k$ on a

$$\mu'(\varepsilon', \varepsilon') = \pm 1$$

et

$$\mu'(a + b\varepsilon', c + d\varepsilon') = (ac \pm bd) + (ad + bc)\,\varepsilon'\,.$$

Ainsi toutes les structures correspondant à $t > 0$ sont isomorphes et il en est ainsi pour celles qui correspondent à $t < 0$. Les dernières sont justement les nombres complexes.

Comme exercice, on peut vouloir calculer le produit de z et de ζ. On observe que $\zeta(\varepsilon)$ et $z(\varepsilon, \varepsilon)$ sont les seuls éléments non nuls et que les valeurs de ζ sont des multiples de ε; celles de z des multiples de 1. D'où $\zeta \,\bar{o}\, z = 0$.

On trouve

$$[\zeta, z]^\circ(\varepsilon, \varepsilon) = (z\bar{\circ}\zeta)(\varepsilon, \varepsilon) = z(\zeta(\varepsilon), \varepsilon) + z(\varepsilon, \zeta(\varepsilon)) = 2 = 2z(\varepsilon, \varepsilon),$$

tandis que les autres valeurs de $[\zeta, z]^\circ$ et de z sont zéro. Autrement dit,

$$[\zeta, z]^\circ = 2z.$$

L'espace ne nous permet pas d'expliquer comment cette formule est liée au fait que μ est une structure de « saut »: il change une fois (dans chaque direction de t); ensuite la structure reste constante. C'est un cas particulier de la situation décrite dans la dernière remarque de la section 6.

Partie III: *Algèbres de Lie et algèbres de Vinberg — plus sur les déformations — systèmes de composition*

Introduction.

Le produit de composition pour des algèbres associatives a été introduit dans la partie II, de même que quelques applications — principalement celles concernant les déformations de telles algèbres. Cependant les possibilités du produit de composition n'ont pas été là épuisées: il prête lui-même à d'autres questions de déformation qui sont mentionnées dans la partie présente: déformations d'homomorphismes d'algèbres et déformations de sous-algèbres. Le crochet $[\,,]^\circ$ de la partie II était à vrai dire un commutateur de produits de composition: on peut le comparer avec l'algèbre de Lie des commutateurs d'une algèbre de Vinberg. On montre maintenant que le produit de composition « plus fin » permet la construction d'autres structures graduées de Lie notées $[\,,]^\cup$ et $[\,,]$ qu'on ne pourrait obtenir à partir de $[\,,]^\circ$ seul. Les nouveaux crochets sont utilisés pour les déformations d'homomorphismes et de sous-algèbres.

Les considérations de cette sorte ne sont nullement limitées aux algèbres associatives: notre première tâche consiste à définir les produits de composition pour les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg de telle façon qu'ensuite toutes les discussions s'appliquent également aux trois types d'algèbres. (Elles s'appliquent aussi aux algèbres associatives et commutatives; cf. les notes bibliographiques.) Quoiqu'on n'ait pas beaucoup à dire en ce qui concerne les produits de composition dans les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg (tous les commentaires antérieurs s'appliquent presque mot pour mot) nous avons pensé appuyer sur leur utilité en donnant un exemple de déformation d'algèbre de Lie.