

# Partie III: Algèbres de Lie et algèbres de Vinberg — plus sur les déformations — systèmes de composition

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On trouve

$$[\zeta, z]^\circ(\varepsilon, \varepsilon) = (z\bar{\partial}\zeta)(\varepsilon, \varepsilon) = z(\zeta(\varepsilon), \varepsilon) + z(\varepsilon, \zeta(\varepsilon)) = 2 = 2z(\varepsilon, \varepsilon),$$

tandis que les autres valeurs de  $[\zeta, z]^\circ$  et de  $z$  sont zéro. Autrement dit,

$$[\zeta, z]^\circ = 2z.$$

L'espace ne nous permet pas d'expliquer comment cette formule est liée au fait que  $\mu$  est une structure de « saut »: il change une fois (dans chaque direction de  $t$ ); ensuite la structure reste constante. C'est un cas particulier de la situation décrite dans la dernière remarque de la section 6.

PARTIE III: *Algèbres de Lie et algèbres de Vinberg*  
— *plus sur les déformations* —  
*systèmes de composition*

*Introduction.*

Le produit de composition pour des algèbres associatives a été introduit dans la partie II, de même que quelques applications — principalement celles concernant les déformations de telles algèbres. Cependant les possibilités du produit de composition n'ont pas été là épuisées: il prête lui-même à d'autres questions de déformation qui sont mentionnées dans la partie présente: déformations d'homomorphismes d'algèbres et déformations de sous-algèbres. Le crochet  $[\ , ]^\circ$  de la partie II était à vrai dire un commutateur de produits de composition: on peut le comparer avec l'algèbre de Lie des commutateurs d'une algèbre de Vinberg. On montre maintenant que le produit de composition « plus fin » permet la construction d'autres structures graduées de Lie notées  $[\ , ]^\cup$  et  $[\ , ]$  qu'on ne pourrait obtenir à partir de  $[\ , ]^\circ$  seul. Les nouveaux crochets sont utilisés pour les déformations d'homomorphismes et de sous-algèbres.

Les considérations de cette sorte ne sont nullement limitées aux algèbres associatives: notre première tâche consiste à définir les produits de composition pour les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg de telle façon qu'ensuite toutes les discussions s'appliquent également aux trois types d'algèbres. (Elles s'appliquent aussi aux algèbres associatives et commutatives; cf. les notes bibliographiques.) Quoiqu'on n'ait pas beaucoup à dire en ce qui concerne les produits de composition dans les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg (tous les commentaires antérieurs s'appliquent presque mot pour mot) nous avons pensé appuyer sur leur utilité en donnant un exemple de déformation d'algèbre de Lie.

L'utilité « universelle » du produit de composition que nous avons ainsi exhibé nous conduit à la question que peut-être d'autres types d'algèbres pourraient admettre aussi des produits de composition. A vrai dire, s'il en est ainsi, alors il y aurait pour chacun de ces types une théorie toute faite de la cohomologie et des sortes variées de déformations attendant pour être appliquées. Les algèbres de Vinberg peuvent par exemple être considérées comme un exemple de type d'algèbre pour lequel on attendait une théorie toute faite.

De façon à asseoir la théorie de façon suffisamment ferme pour permettre de telles théories toutes faites, il est nécessaire de réduire non seulement toutes les définitions mais aussi toutes les preuves de théorèmes à des propriétés explicitement énoncées du produit de composition. L'espace ne nous permet pas la pleine exécution d'un tel programme. Cependant, nous donnons un exposé explicite des propriétés requises du produit de composition (introduisant là les *systemes de composition*), et montrons comment certaines propriétés décisives suivent des axiomes.

#### 8. *Un deuxième produit de composition.*

On a montré que le produit de composition introduit dans la section 4 est justement la pièce de mécanisme qu'il faut pour un certain nombre de questions liées aux algèbres associatives. Nous introduisons maintenant — dans un style beaucoup plus bref — un deuxième produit de composition qui fait de même pour les algèbres de Lie de façon si semblable qu'il y a réellement très peu à dire. La répétition de la même histoire ne servirait aucun but; il est assez de suggérer que le lecteur se convainque lui-même en parcourant une fois encore le matériel.

Nous prenons à nouveau un espace vectoriel  $V$  et prenons pour applications linéaires d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $V$  seulement celles d'entre elles qui sont alternées. Pour deux telles applications,  $f$  et  $g$  (la dernière étant linéaire d'ordre  $m$ ) on définit  $f \bar{\wedge} g$  (prononcez  $f$  « hook »  $g$ ) par

$$(12) \quad (f \bar{\wedge} g)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) = \\ = \sum sg \tau f(g(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(m)}), x_{\tau(m+1)}, \dots, x_{\tau(n+m-1)}),$$

où la sommation est sur les permutations  $\tau$  de  $\{1, \dots, n+m-1\}$  pour lesquelles

$$\tau(1) < \dots < \tau(m) \quad \text{et} \quad \tau(m+1) < \dots < \tau(n+m-1).$$

On peut aussi sommer sur toutes les permutations et diviser par  $m! (n-1)!$ . Notons que pour que cette formule ait un sens les valeurs de  $f$  n'ont pas

besoin d'être dans  $V$  mais peuvent appartenir à n'importe quel espace vectoriel.

La relation avec les algèbres de Lie est la suivante: si  $\mu$  est une application bilinéaire alternée de  $V$  dans  $V$ , alors  $\mu$  définit une structure d'algèbre de Lie si et seulement si  $\mu \bar{\wedge} \mu = 0$ . Une copie donne la vérification immédiate de l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} (\mu \bar{\wedge} \mu)(x, y, z) &= \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(x, z), y) + \mu(\mu(y, z), x) = \\ &= \mu(\mu(x, y), z) + \mu(\mu(y, z), x) + \mu(\mu(z, x), y). \end{aligned}$$

Une fois donnée la définition de  $\bar{\wedge}$  on répète avec presque une monotonie assommante en prenant  $\bar{\circ}$  comme modèle: (9) est valable (la preuve suit la même idée),  $[\cdot, \cdot]^\circ$  est défini comme dans le dernier théorème de la section 4 et donne à nouveau une structure d'algèbre de Lie graduée. Le cobord  $\delta$  est défini comme auparavant par  $\delta f = -[\mu, f]^\circ$ . En considérant le produit semi-direct d'une algèbre de Lie et d'un module on trouve pour  $\delta f$  dans le cas où  $f$  est une application d'ordre  $n$  alternée de  $V$  dans  $M$  la formule:

$$\begin{aligned} (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} f(\mu(x_i, x_j), x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

qui dans cette situation est exactement la formule classique.

Les applications et les exemples des sections 4 et 5 peuvent être répétés presque mot pour mot. La théorie de la déformation de la section 6 marche sans changement perceptible.

On doit faire une petite modification dans l'exemple 3 de la section 5. Le groupe des automorphismes intérieurs d'une algèbre de Lie doit être défini différemment. On utilise le fait qu'à chaque algèbre de Lie correspond un groupe de Lie (pas du tout unique) et que les automorphismes intérieurs de ce groupe (donnés par les applications de la forme  $b \mapsto aba^{-1}$ ) induisent un groupe d'automorphismes de l'algèbre de Lie. (Le groupe est unique si par exemple nous exigeons qu'il soit connexe.) L'algèbre de Lie est exactement  $B^1(V, V)$ . Toutes les remarques ultérieures de l'exemple 3 continuent à s'appliquer.

### 9. Un autre exemple.

Nous étudions maintenant les déformations d'une algèbre de Lie  $V$  de dimension trois ayant pour base  $p, q, \mathbf{1}$  telle que

$$\mu(p, q) = \mathbf{1}, \quad \mu(q, \mathbf{1}) = \mu(\mathbf{1}, p) = 0;$$



les physiciens la nomment d'après Heisenberg. En vue de la simplicité, nous considérerons les équivalences sur les nombres complexes de sorte que  $V$  sera un espace vectoriel complexe. (Autrement il faudrait distinguer entre les racines réelles et les racines imaginaires des équations, etc.).

Soit  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire, on a alors

$$(\delta f)(p, q) = \mu(p, f(q)) - \mu(q, f(p)) - f(\mu(p, q)) = \mu(p, f(q)) - \mu(q, f(p)) - f(\mathbf{1}),$$

$$(\delta f)(q, \mathbf{1}) = \mu(q, f(\mathbf{1})) - \mu(\mathbf{1}, f(q)) - f(\mu(q, \mathbf{1})) = \mu(q, f(\mathbf{1})),$$

$$(\delta f)(\mathbf{1}, p) = \mu(\mathbf{1}, f(p)) - \mu(p, f(\mathbf{1})) - f(\mu(\mathbf{1}, p)) = -\mu(p, f(\mathbf{1})).$$

Soit

$$f(x) = f_1(x) \mathbf{1} + f_p(x) p + f_q(x) q,$$

de telle sorte que  $f_1(x)$ , etc., sont les composantes de  $f(x)$ ; on a alors

$$(\delta f)(p, q) = (f_q(q) + f_p(p) - f_1(\mathbf{1}) \mathbf{1} - f_p(\mathbf{1}) p - f_q(\mathbf{1}) q),$$

$$(\delta f)(q, \mathbf{1}) = -f_p(\mathbf{1}) \mathbf{1},$$

$$(\delta f)(\mathbf{1}, p) = -f_q(\mathbf{1}) \mathbf{1}.$$

Par suite,  $f$  est une dérivation si et seulement si

$$f_p(\mathbf{1}) = f_q(\mathbf{1}) = f_q(q) + f_p(p) - f_1(\mathbf{1}) = 0.$$

De plus,  $B^2$  est engendré par les applications bilinéaires alternées  $\varphi$  pour lesquelles (en utilisant pour les composantes une notation analogue)

$$\varphi_1(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(p, q), \quad \varphi_1(\mathbf{1}, p) = \varphi_q(p, q),$$

$$\varphi_q(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(\mathbf{1}, p) = \varphi_q(\mathbf{1}, p) = 0.$$

Un espace complémentaire à  $B^2$  est formé des  $\varphi$  pour lesquels  $\varphi_1 = 0$ . Soit  $\varphi \in W$ ; on calcule  $\delta\varphi$ :

$$\begin{aligned} (\delta\varphi)(p, q, \mathbf{1}) &= \mu(p, \varphi(q, \mathbf{1})) + \mu(q, \varphi(\mathbf{1}, p)) + \mu(\mathbf{1}, \varphi(p, q)) + \\ &- \varphi(\mu(p, q), \mathbf{1}) - \varphi(\mu(q, \mathbf{1}), p) - \varphi(\mu(\mathbf{1}, p), q) = \\ &\varphi_p(q, \mathbf{1}) \mathbf{1} - \varphi_p(\mathbf{1}, p) \mathbf{1} + 0 - 0 - 0 - 0. \end{aligned}$$

Ainsi on a  $\delta\varphi = 0$  pour  $\varphi \in W$  si et seulement si  $\varphi_p(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(\mathbf{1}, p)$ . Les composantes encore libres d'un cocycle  $\varphi$  de  $W$  sont donc

$$\varphi_p(q, \mathbf{1}), \quad \varphi_q(q, \mathbf{1}), \quad \varphi_q(\mathbf{1}, p), \quad \varphi_p(p, q), \quad \varphi_q(p, q),$$

tandis que  $\varphi_p(\mathbf{1}, p)$  doit être égal à  $\varphi_q(q, \mathbf{1})$  et que  $\varphi_1 = 0$ . Donc  $H^2$  est de dimension 5. Un espace complémentaire  $U^2$  consiste en les  $\varphi$  pour lesquels  $\varphi_p(\mathbf{1}, p)$  est libre tandis que les autres valeurs sont zéro.

L'équation de déformation est

$$\delta u - (z + u) \bar{\wedge} (z + u) = 0,$$

où on doit prendre  $z$  dans  $H^2$  et  $u$  dans  $U^2$ . D'après le calcul précédent on a

$$(\delta u)(p, q, \mathbf{1}) = -u_p(\mathbf{1}, p) \mathbf{1}.$$

Comme les valeurs de  $z$  et de  $u$  sont dans le sous-espace engendré par  $p$  et  $q$ , il en est de même de  $(z+u) \bar{\wedge} (z+u)$ . Puisque les valeurs de  $\delta u$  sont des multiples de  $\mathbf{1}$ , il s'en suit que  $u$  peut satisfaire à l'équation de déformation seulement pour  $\delta u = 0$ , i.e.  $u = 0$ . Par suite, nous trouvons que toutes les déformations dans  $P$  sont données par  $\mu' = \mu + z$  avec  $z \in H^2$  et  $z \bar{\wedge} z = 0$ . (La dernière équation est exactement  $\Omega(z) = 0$ .)

Nous avons donc

$$\begin{aligned} (z \bar{\wedge} z)(p, q, \mathbf{1}) &= z(z(p, q), \mathbf{1}) + z(z_p(q, \mathbf{1})p + z_q(q, \mathbf{1})q, p) + \\ &+ z(z_p(\mathbf{1}, p)p + z_q(\mathbf{1}, p)q, q). \end{aligned}$$

Les deux derniers termes s'éliminent puisque  $z_q(q, \mathbf{1}) = z_p(\mathbf{1}, p)$ ; ainsi  $z \bar{\wedge} z = 0$  est équivalent à

$$z(z(p, q), \mathbf{1}) = 0.$$

Cela termine réellement la partie théorique du problème de déformation. Nous utilisons maintenant des méthodes classiques pour trouver les solutions.

Pour résoudre l'équation, nous considérons l'application  $\alpha : x \mapsto z(x, \mathbf{1})$  de  $x$  dans l'espace  $X$  engendré par  $p$  et  $q$ . Les composantes relativement à la base  $p, q$  de  $X$  sont données par la matrice

$$\begin{bmatrix} z_p(p, \mathbf{1}) & z_q(p, \mathbf{1}) \\ z_p(q, \mathbf{1}) & z_q(q, \mathbf{1}) \end{bmatrix}$$

Comme cette matrice a pour trace zéro, la forme canonique de Jordan est

$$(a) \quad \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{on} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons encore  $p, q$  la base par rapport à laquelle est assurée une de ces formes. On peut supposer que la transformation qui mène de l'ancienne base à la nouvelle a pour déterminant 1; alors  $\mu(p, q)$  ne change pas.

Nous distinguons plusieurs cas.

*Cas 1.*  $z(p, q) = 0$ . La forme (a) n'a lieu alors que pour  $\lambda \neq 0$ , car sinon on a  $z = 0$  (donc aucune déformation). On trouve (cas 1a)

$$\mu'(p, q) = \mathbf{1}, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = \lambda q, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = \lambda p.$$

En prenant la base  $(p/\lambda^{1/2}, q/\lambda^{1/2}, \mathbf{1}/\lambda)$  on obtient une réduction de plus

$$\begin{aligned} \text{cas 1a} \quad \mu'(p, q) &= \mathbf{1}, \\ \mu'(q, \mathbf{1}) &= q, \\ \mu'(\mathbf{1}, p) &= p. \end{aligned}$$

Dans le cas (b) on trouve

$$\begin{aligned} \text{cas 1b} \quad \mu'(p, q) &= \mathbf{1}, \\ \mu'(q, \mathbf{1}) &= p, \\ \mu'(\mathbf{1}, p) &= 0. \end{aligned}$$

*Cas 2.*  $z(p, q) \neq 0$ . Dans ce cas,  $z(p, q)$  est un vecteur nul pour  $\alpha$ , donc  $\lambda = 0$  et  $z(p, q)$  est un multiple de  $p$ ; disons  $z(p, q) = ap$  par rapport à une base convenable. Dans le cas (a) on trouve

$$\mu'(p, q) = \mathbf{1} + ap, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = 0, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = 0.$$

Par rapport à la base  $(ap + \mathbf{1}, q, \mathbf{1})$  cela devient

$$\begin{aligned} \text{cas 2a} \quad \mu'(p, q) &= p, \\ \mu'(q, \mathbf{1}) &= 0, \\ \mu'(\mathbf{1}, p) &= 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant à nouveau le cas (b); alors

$$\mu'(p, q) = \mathbf{1} + ap, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = p, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = 0,$$

où  $a \neq 0$ . Tout élément  $\eta$  qui n'est pas dans le plan  $Y$  de  $\mathbf{1}$  et de  $p$  induit une application  $y \mapsto \mu'(y, \eta)$ ; elles diffèrent toutes uniquement par un facteur.

Pour  $\eta = q$ , nous avons  $\beta : y \mapsto \mu'(y, q)$ . La matrice de  $\beta$  est  $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ; son

polynôme caractéristique est  $\lambda^2 - a\lambda + 1$ . Le discriminant  $a^2 - 4$  est  $\neq 0$  pour  $a \neq \pm 2$ , de telle façon que les valeurs propres  $\lambda$  et  $1/\lambda$  sont soit distinctes de  $\pm i$  (puisque  $a \neq 0$ ) ou toutes deux égales à  $\pm 1$ . Dans le premier cas une base pour  $Y$  existe (encore notée  $(p, \mathbf{1})$  telle que

$$\mu'(p, q) = \lambda p, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = -\lambda^{-1} \mathbf{1}, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = 0.$$

On divise  $q$  par  $\lambda$ , on pose  $-1/\lambda^2 = \tau$  et on trouve

$$\mu'(p, q) = p, (\tau \neq 0, \pm 1).$$

*cas 2b'*  $\mu'(q, \mathbf{1}) = \tau \mathbf{1},$

$$\mu'(\mathbf{1}, p) = 0.$$

Les cas  $\tau$  et  $1/\tau$  sont équivalents: changer  $p$  et  $\mathbf{1}$  et remettre  $q$  à l'échelle.

Dans le dernier cas, la matrice de  $\beta$  est  $\begin{bmatrix} \pm 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$

qui est équivalente à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les  $\mu'$  correspondants sont équivalents; pour le premier on trouve

*cas 2b''*  $\mu'(p, q) = p,$   
 $\mu'(q, \mathbf{1}) = -\mathbf{1} - p,$   
 $\mu'(\mathbf{1}, p) = 0.$

Toutes les structures suivantes peuvent à vrai dire être atteintes par de petites déformations arbitraires:

*Cas 1a.*  $z(p, q) = 0, \quad z(p, \mathbf{1}) = -tp, \quad z(q, \mathbf{1}) = tq,$

*Cas 1b.*  $z(p, q) = 0, \quad z(p, \mathbf{1}) = 0, \quad z(q, \mathbf{1}) = tp,$

*Cas 2a.*  $z(p, q) = tp, \quad z(p, \mathbf{1}) = 0, \quad z(q, \mathbf{1}) = 0,$

*Cas 2b.*  $z(p, q) = tap, \quad z(p, \mathbf{1}) = 0, \quad z(q, \mathbf{1}) = -tp.$

### 10. Un troisième produit de composition

Pour étudier les algèbres de Vinberg on a encore besoin d'un autre produit de composition. Le trait qui le distingue principalement est qu'il est beaucoup moins connu que les deux autres. Nous le noterons  $\zeta$ . Les fonctions linéaires d'ordre  $n$  que nous considérons sont celles qui sont alternées par rapport aux  $n - 1$  premières variables. Il est parfois utile de les considérer aussi comme des applications alternées, d'ordre  $n - 1$ ,  $f'$  de  $V$  à valeurs dans l'espace  $\text{End}(V)$ , des applications linéaires  $V \rightarrow V$ .

Supposons maintenant que  $f$  est comme ci-dessus, et  $g$  de même mais linéaire d'ordre  $m$ . Alors  $f \zeta g$  est de la même sorte, linéaire d'ordre  $n + m - 1$  et donné par

$$(f \zeta g)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) =$$

$$= \sum_1 sg \sigma f(g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m-1)}, x_{\sigma(m)}, x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(m+n-2)}, x_{n+m-1})) + \\ + (-1)^{(m-1)(n-1)} \sum_2 sg \sigma f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}, \\ g(x_{\sigma(n)}, \dots, x_{\sigma(n+m-2)}, x_{n+m-1})),$$

où  $\sum_1$  porte sur toutes les permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n+m-2\}$  telles que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(m-1)$  et  $\sigma(m+1) < \dots < \sigma(n+m-2)$  tandis que la somme  $\sum_2$  porte sur les permutations  $\sigma$  vérifiant  $\sigma(1) < \dots < \sigma(n-1)$  et  $\sigma(n) < \dots < \sigma(n+m-2)$ . Notons que  $g$  est complètement antisymétrique par rapport à la première somme, mais ne l'est pas par rapport à la deuxième. Notons aussi que  $x_{n+m-1}$  n'est dans aucune des permutations.

Une forme plus courte pour la définition de  $f \zeta g$  est obtenue à l'aide de  $f'$  et  $g'$ , les applications alternées linéaires d'ordre  $(n-1)$  resp.  $(m-1)$  de  $V$  dans  $\text{End } V$ . Nous avons besoin aussi de  $\hat{g}$  le  $g$  complètement alterné, ainsi  $\hat{g}$  est une application linéaire d'ordre  $m$  de  $V$  dans  $V$ .

Avec ces conventions on a

$$(f \zeta g)' = f' \wedge \hat{g} + (-1)^{(m-1)(n-1)} f' \wedge g'.$$

Notons que  $f' \wedge g'$  est le produit extérieur de deux formes alternées à valeurs dans l'algèbre (associative)  $\text{End } V$ ; comme cette algèbre n'est pas commutative, il n'y a pas de relation simple entre  $f' \wedge g'$  et  $g' \wedge f'$ . La deuxième forme est plus commode pour prouver (9) en ce qui concerne  $\zeta$ .

Lorsque  $\mu$  est une application bilinéaire de  $V$  dans  $V$ ,  $\mu \zeta \mu = 0$  est juste la condition (1); en fait

$$(\mu \zeta \mu)(x, y, z) = \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(y, x), z) - \mu(x, \mu(y, z)) + \\ + \mu(y, \mu(x, z)).$$

Le produit de composition associé aux algèbres de Vinberg, comme on l'a donné, diffère de celui qui a été donné pour les algèbres associatives et les algèbres de Lie par un aspect important: les applications multilinéaires pour lesquelles il est défini ont un degré positif: les produits  $f \zeta x$  (avec  $x \in V$ ) n'ont pas été définis. Nous les poserons arbitrairement égaux à zéro. La signification la plus profonde de la difficulté à trouver une définition naturelle de  $f \zeta x$  vient du fait que les commutateurs (voir le cas  $n=0$  de la section 4: « dérivations intérieures ») ne donnent pas des dérivations dans les algèbres de Vinberg. Les exemples 1 et 3 de la section 5 deviennent vides:  $B^1(V, M) = 0$  et le groupe des automorphismes intérieurs se réduit à l'identité.

Toutes les autres remarques faites dans la section 8 pour les algèbres de Lie valent maintenant pour les algèbres de Vinberg avec seulement les

modifications évidentes. Nous copions la formule des cobords. Rappelons que  $\delta f = -f \zeta \mu + (-1)^{n-1} \mu \zeta f$  :

$$\begin{aligned}
 (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) + \\
 &+ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_i) x_n - \\
 &- \sum_{i < j < n} (-1)^{i+j+1} f([x_i, x_j], \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) - \\
 &- \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_i x_n) .
 \end{aligned}$$

Les deux premières sommes viennent de la partie  $\mu \zeta f$ , les autres de  $f \zeta \mu$ . Notons à nouveau que  $x_n$  est toujours la dernière variable; il n'est sujet à aucune des sommations.

Nous récrivons, en utilisant  $f'$ , le cobord et trouverons ainsi une relation avec la cohomologie de l'algèbre de Lie.

$$\begin{aligned}
 (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \{ x_i \{ f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_n \} - \\
 &\quad - f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) (x_i x_n) + \\
 &\quad + \{ f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_i \} x_n \} - \\
 &- \sum_{i < j < n} (-1)^{i+j+1} f'([x_i, x_j], \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}) x_n .
 \end{aligned}$$

L'expression intérieure aux grandes accolades de la première somme peut être écrite

$$\begin{aligned}
 \{ L_{x_i} f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) - f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) L_{x_i} + \\
 + L_{f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_i} \} x_n
 \end{aligned}$$

En comparant cela avec l'exemple du module de Vinberg  $\text{End}(V)$  de la section 3, on voit (en utilisant la même notation) que

$$\begin{aligned}
 (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \lambda(x_i, f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})) x_n - \\
 &- \sum_{i < j < n} (-1)^{i+j+1} f'([x_i, x_j], \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}) x_n .
 \end{aligned}$$

C'est la formule des cobords de la section 8 puisque, comme nous le rappelons,  $x \mapsto \lambda(x, \alpha)$  est une représentation (à gauche) de l'algèbre de Lie

$V_{Lie}$  associée à l'algèbre de Vinberg  $V$ . Avec des notations évidentes par elles-mêmes nous avons donc :

$$(\delta_{Vinberg} f)' = \delta_{Lie} f'.$$

Une conséquence directe de cela est

$$H^n(V, V) \cong H^{n-1}(V_{Lie}, End(V)).$$

De nombreuses propriétés de la cohomologie des algèbres de Vinberg peuvent donc être déduites de la cohomologie des algèbres de Lie. Notons, cependant, que la structure de Vinberg n'a pas été perdue dans cet isomorphisme. Elle a été utilisée essentiellement par la définition sur  $End(V)$  d'une structure inaccoutumée (à savoir,  $\lambda$ ) de module sur  $V_{Lie}$ .

Comme dans le cas associatif et le cas de Lie, la cohomologie de  $V$  à coefficients dans  $V$  induit une structure graduée de Lie  $[,]^\circ$ . On peut se demander si, vu l'isomorphisme précédent, cela peut être « expliqué » par quelque structure graduée de Lie connue portant sur la cohomologie de  $V_{Lie}$  à coefficients dans  $End(V)$ . La réponse n'est pas connue pour l'instant.

### 11. Le cup-crochet.

Jusqu'à maintenant tous les problèmes que nous avons considérés tournent autour du crochet  $[,]^\circ$  que nous pouvons appeler le crochet de composition. Nous avons montré, par exemple, que l'opérateur cobord et les problèmes de déformation peuvent s'exprimer au moyen de ce produit seul. Si nous utilisons  $\bar{o}$  (ou  $\bar{\lambda}$  ou  $\zeta$ ) avant tout, c'est parce que  $\varphi \bar{o} \varphi$  est plus facile à écrire (ou à copier) que  $\frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\circ$ .

Cependant en principe,  $[,]^\circ$  et ses propriétés suffiraient pour les parties théoriques et la structure « plus fine »  $\bar{o}$  n'était pas nécessaire.

Dans cette section nous introduisons le cup-crochet  $[,]^\cup$  qui peut être défini au moyen de  $\bar{o}$  seul, mais ne peut pas l'être au moyen de  $[,]^\circ$ . Ainsi sa définition dépend de la structure disponible la plus fine.

En partant pour l'instant sur une ligne plus intuitive, nous considérons un homomorphisme arbitraire  $h : V \rightarrow V'$  d'algèbres dont on désigne les produits par  $\mu$  et  $\mu'$ . Ainsi  $h$  vérifie

$$h\mu(x, y) = \mu'(hx, hy).$$

Si  $\varphi : V \rightarrow V'$  est linéaire, alors  $h + \varphi$  est un autre homomorphisme (à vrai dire déformé) si

$$(h + \varphi)\mu(x, y) = \mu'((h + \varphi)x, (h + \varphi)y).$$

En utilisant la formule ci-dessus on peut récrire cela

$$\mu'(hx, \varphi y) - \varphi \mu(x, y) + \mu'(\varphi x, hy) + \mu'(\varphi x, \varphi y) = 0.$$

Or  $V'$  est un  $V$ -module via  $h$ ; dans le cas associatif et dans le cas de Vinberg donné par

$$\lambda(x, y') = \mu'(hx, y'), \quad \rho(x', y) = \mu'(x', yh),$$

et dans le cas de Lie par seulement la première de ces formules. Dans les trois cas, les premiers trois termes sont exactement  $(\delta\varphi)(x, y)$ . Le dernier terme est par une définition que nous allons donner tout à l'heure égal à  $\frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\cup(x, y)$ . L'équation de déformation devient ainsi

$$\delta\varphi + \frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\cup = 0;$$

c'est la forme habituelle (cf. (11)), quoique le degré de  $\varphi$ , l'image de  $\varphi$  et le crochet soient différents.

Pour les algèbres associatives le cup-produit est bien connu. Soit  $f, g$  des applications linéaires d'ordre  $n$  resp.  $m$  de  $V$  dans  $V'$ ; alors  $f \cup g$  est donné par

$$(f \cup g)(x_1, \dots, x_{n+m}) = \mu'(f(x_1, \dots, x_n), g(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})).$$

Le cup-produit est évidemment associatif, et on peut montrer aisément que  $\delta$  est une dérivation:

$$\delta(f \cup g) = \delta f \cup g + (-1)^n f \cup \delta g.$$

Il s'en suit (voir la section 5) qu'un cup-produit est induit dans la cohomologie de  $V$  à coefficients dans  $V'$ . En prenant les commutateurs

$$[f, g]^\cup = f \cup g - (-1)^{mn} g \cup f$$

on obtient une structure graduée d'algèbre de Lie: le cup-crochet. Naturellement  $\delta$  est encore une dérivation.

Dans le cas des algèbres de Lie  $V, V'$  on définit  $[, ]^\cup$  directement:

$$\begin{aligned} [f, g]^\cup(x_1, \dots, x_{n+m}) &= \\ &= \sum sg \sigma \mu'(f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), g(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m)})), \end{aligned}$$

avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(n) \quad \text{et} \quad \sigma(n+1) < \dots < \sigma(n+m).$$

Le cup-crochet définit une structure graduée d'algèbre de Lie, et  $\delta$  est une dérivation par rapport à  $[, ]^\cup$ .



Dans le cas des algèbres de Vinberg on pose

$$(f \cup g)(x_1, \dots, x_{n+m}) = \\ = \Sigma sg \sigma \mu' (f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}), g(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m-1)}, x_{n+m}))$$

avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(n-1) \quad \text{et} \quad \sigma(n+1) < \dots < \sigma(n+m-1).$$

Notons que l'on ne permute pas  $x_{n+m}$  et qu'on a symétrisé à gauche  $f$ . Ce produit vérifie

$$(f \cup g) \cup k - f \cup (g \cup k) = (-1)^{mn} \{ (g \cup f) \cup k - g \cup (f \cup k) \},$$

de telle sorte que les commutateurs définissent une algèbre de Lie graduée (le cup-crochet)  $[\cdot, \cdot]^\cup$ ; cf. la fin de la section 4 pour une situation semblable. L'application  $f \mapsto f \zeta \mu$  est une dérivation par rapport à  $\cup$ ; donc aussi par rapport à  $[\cdot, \cdot]^\cup$ . De façon analogue,  $f \mapsto (-1)^n \mu \zeta f = (-1)^n f \cup h - h \cup f = -[h, f]^\cup$  est une dérivation par rapport à  $[\cdot, \cdot]^\cup$  grâce à l'identité de Jacobi. Par suite  $\delta$  est une dérivation par rapport à  $[\cdot, \cdot]^\cup$ ; cependant ce n'est pas une dérivation par rapport à  $\cup$ .

Ainsi, nous avons, dans les trois cas, un cup-crochet  $[\cdot, \cdot]^\cup$  qui donne une structure graduée de Lie et pour laquelle  $\delta$  est une dérivation. De plus, si  $\varphi : V \rightarrow V'$  est linéaire, alors dans les trois cas

$$\frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\cup(x, y) = \mu'(\varphi x, \varphi y).$$

Cela justifie la notation de l'équation de déformation.

Comme affirmé au début de cette section,  $[f, g]^\cup$  peut être exprimé au moyen du produit de composition resp.  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\wedge}$  et  $\zeta$ . Nous le montrons d'abord pour  $V' = V$ . La preuve est assez simple dans les trois cas pourvu qu'on aille réellement dans les détails de la déduction de (9) qui utilisent les suggestions qui suivent (9). La comparaison de la preuve et de la définition de  $[\cdot, \cdot]^\cup$  nous montrera alors que

$$[f, g]^\cup = (-1)^{m-1} \{ (\mu \bar{\sigma} g) \bar{\sigma} f - \mu \bar{\sigma} (g \bar{\sigma} f) \},$$

et de même pour  $\bar{\wedge}$  et  $\zeta$ . Dans les trois cas il est utile de considérer d'abord le terme en  $\mu \bar{\sigma} g$  resp.  $\mu \zeta g$  pour lequel  $g$  occupe par rapport à  $\mu$  la seconde place; pour  $\mu \bar{\wedge} g$  nous bougerons simplement  $g$  pour qu'il soit à la seconde place — ensuite nous appliquons sur la droite  $\bar{\sigma} f$  ( $\zeta f$  resp.  $\bar{\wedge} f$ ). Le lecteur peut à nouveau suppléer aux détails complémentaires. Notons que (9) implique

$$[f, g]^\cup = (-1)^{mn+1} [g, f]^\cup.$$

La formule donnant  $[f, g]^\cup$  peut être résumée si on se rappelle que  $\mu \bar{o} g$  est un terme de  $\delta g$ ; de façon analogue  $\mu \bar{o} (g\bar{o}f)$  est un terme de  $\delta (g\bar{o}f)$ . En insérant les termes omis et en appliquant (9) on trouve

$$[f, g]^\cup = \delta g \bar{o} f - (-1)^n g \bar{o} \delta f + (-1)^n \delta (g \bar{o} f).$$

(Naturellement on a la même chose pour  $\bar{\wedge}$  et  $\zeta$ .) Cette formule a quelques conséquences intéressantes. Elle nous indique tout d'abord que  $\delta$  n'est pas en général une dérivation par rapport à  $\bar{o}$ ; deuxièmement il s'en suit que le produit  $[,]^\cup$  induit dans la cohomologie de  $V$  à coefficients dans  $V$  vaut zéro (il n'en est pas ainsi quand les coefficients sont dans  $V'$ .)

Une troisième remarque est que la propriété de dérivation de  $\delta$  par rapport à  $[,]^\cup$  suit assez facilement de la dernière formule. Assez curieusement cependant, l'identité de Jacobi pour  $[,]^\cup$  ne semble pas suivre de formules générales telles que (9) et ses conséquences, mais dépend de quelques propriétés délicates de  $\bar{o}$  que nous n'avons pas encore formulées abstraitement. Nous reviendrons sur cela dans la section 13.

De façon à enlever la restriction  $V' = V$  des remarques précédentes, nous passons, comme dans la section 5, au produit semi-direct  $W = V \times V'$  dans lequel nous introduisons un produit  $\bar{\mu}$  donné par

$$\bar{\mu}((x, x'), (y, y')) = (\mu(x, y), \mu'(hx, y) + \mu'(x', hy) + \mu'(x, y')).$$

Il est du même type (associatif, de Lie, de Vinberg) que  $\mu$  et  $\mu'$ . La signification de  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  est celle de la section 5. Avec ces notations nous avons alors

$$([f, g]^\cup)^\bar{-} = (-1)^{m-1} \{ (\bar{\mu}\bar{o}\bar{g})\bar{o}f - \bar{\mu}\bar{o}(\bar{g}\bar{o}\bar{f}) \} = (-1)^{m-1} (\bar{\mu}\bar{o}g)\bar{o}f$$

le dernier terme du membre du milieu vaut zéro car  $\bar{g}\bar{o}\bar{f} = 0$ . (La même formule vaut à nouveau pour  $\bar{\wedge}$  et  $\zeta$ ). Ainsi, dans tous les cas,  $[,]^\cup$  a été réduit à des produits de composition.

Dans l'algèbre de Lie graduée avec comme produit  $[,]^\cup$  les éléments de  $V'$  (applications linéaires d'ordre 0 de  $V$  dans  $V'$ ) forment une algèbre de Lie ordinaire.

On a

$$[x', y']^\cup = \mu'(x', y') - \mu'(y', x') \quad (\text{cas associatif})$$

$$[x', y']^\cup = \mu'(x', y') \quad (\text{cas de Lie}),$$

tandis que pour les algèbres de Vinberg le produit considéré dégénère en zéro. Leur produit avec une application  $f$  linéaire d'ordre  $n$  est donné par

$$[y', f]^\cup(x_1, \dots, x_n) = y' f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) y' \quad (\text{cas associatif})$$

$$[y', f]^\cup(x_1, \dots, x_n) = \mu'(y', f(x_1, \dots, x_n)) \quad (\text{cas de Lie})$$

Alors que les opérateurs cobords pour les fonctions linéaires d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $W$  resp.  $M$  sont liés naturellement comme nous l'avons justement vu, il n'y a pas de telle relation naturelle en ce qui concerne le cup-crochet  $[f, g]^\cup$ . Non seulement le cup-crochet n'est pas défini pour des fonctions à valeurs dans  $M$  mais si  $f$  et  $g$  prennent leurs valeurs dans  $M$  l'opérateur  $(f, g) \mapsto \pi^* \circ [\pi^* f, \pi^* g]^\cup$  dépend de façon essentielle du choix de l'espace  $U$ . Cependant, une modification de  $[\cdot, \cdot]^\cup$  marche au moins *partiellement* pour induire un produit: on définit ainsi une structure graduée d'algèbre de Lie pour la *cohomologie* de  $V$  à coefficients dans  $M$ .

La formule principale concernant le nouveau crochet est

$$[f, g] = [f, g]^\cup + (-1)^n g \circ \delta f + (-1)^{mn+m+1} f \bar{\circ} \delta g .$$

Cela a clairement un sens quand  $f$  et  $g$  sont des fonctions multilinéaires de  $W$  à valeurs dans  $W$ . On peut montrer (avec beaucoup d'efforts) que ce crochet définit une structure d'algèbre de Lie. Si  $f$  et  $g$  sont des applications multilinéaires de  $V$  à valeurs dans  $W$  la formule prend un sens seulement si les valeurs de  $\delta f$  et de  $\delta g$  sont à nouveau dans  $V$ ; i.e. exactement si  $\pi \circ f$  et  $\pi \circ g$  sont des cocycles.

Des calculs assez simples (utilisant  $\pi$  et la formule donnant  $[f, g]^\cup$ ) montrent que si  $\delta f$  et  $\delta g$  ont leurs valeurs dans  $V$ , alors  $\delta [f, g] = [\delta f, \delta g]^\circ$  a aussi ses valeurs dans  $V$ ; i.e.  $\pi \circ [f, g]$  est un cocycle. De façon analogue, on montre que la classe de cohomologie de  $\pi \circ [f, g]$  dépend seulement de  $\pi \circ f$  et de  $\pi \circ g$ . L'espace ne nous permet pas d'entrer dans les détails.

Il est facile de voir que la situation décrite dans cette section est une généralisation de celle de la section 5 où  $W$  était le produit semi-direct d'une algèbre  $V$  et d'un module: à la fois là et ici le quotient  $W/V$  est un  $V$ -module; dans le premier cas c'était le module dont on était parti. Par la construction actuelle, la cohomologie à coefficients dans un module (situation de la section 5) a un produit nul. De façon analogue, la situation ici est une généralisation de celle de la section 11; les produits gradués de Lie pour la cohomologie sont les mêmes dans les deux constructions (prendre  $V=V'$ ).

Nous indiquons brièvement la relation entre la cohomologie qu'on vient de discuter dans cette section et les déformations de sous-algèbres.

Supposons que  $V_1$  est un sous-espace de  $W$  qui est proche de  $V$ ; alors  $W$  est (comme espace vectoriel) la somme directe de  $V_1$  et de  $U$ . Soit  $w \in W$ , alors  $w = v + u$  (décomposition par rapport à  $V$  et  $U$ ) et aussi  $w = v_1 + u_1$  (décomposition par rapport à  $V_1$  et  $U$ ). L'application  $A : w \mapsto u_1 - u$  est linéaire et envoie  $W$  dans  $U$ . Pour  $w \in U$ , on a  $v = v_1 = 0$ , et  $u = u_1 = w$  de telle sorte que  $A$  vaut zéro sur  $U$ . Ainsi  $A$  est entièrement déterminé

tandis qu'à nouveau on trouve zéro dans le cas de Vinberg. Dans tous les cas, c'est l'action de  $y'$  sur les valeurs de  $f$  par des dérivations intérieures de  $V'$ ; i.e. par l'action infinitésimale du groupe des automorphismes intérieurs de  $V'$  sur les valeurs de  $f$ . Il est donc naturel que l'étude des déformations d'homomorphismes  $h : V \rightarrow V'$  prend sa forme la plus simple quand les équivalences de déformation de  $h$  sont données par le groupe d'automorphismes intérieurs de  $V'$ . Les résultats précis, que le manque de place ne nous permet pas de citer totalement, sont très semblables à ceux formulés dans la section 6. Les déformations infinitésimales modulo celles qui sont triviales sont données par  $H^1(V, V')$ ; l'espace d'obstruction est  $H^2(V, V')$ . En particulier,  $h$  est rigide quand  $H^1(V, V') = 0$ .

## 12. Sous-algèbres et encore un autre crochet.

Dans cette section nous discutons brièvement un autre crochet défini au moyen des seuls produits de composition et indiquons (sans aucune tentative vers la perfection) comment on peut l'appliquer aux déformations de sous-algèbres.

Nous considérons un espace vectoriel  $W$  muni d'un produit  $\mu$  d'un des trois types (associatif, de Lie, de Vinberg) considérés. Pour la simplicité, nous utiliserons seulement la notation  $\bar{\circ}$  pour représenter  $\bar{\circ}$ ,  $\bar{\wedge}$  ou  $\bar{\zeta}$ . Soit  $V$  un sous-espace de  $W$  qui en même temps est une sous-algèbre; i.e.  $\mu(V, V) \subset V$ . La restriction à  $V \times V$  de  $\mu$  est notée  $\mu'$ . Il est évident que  $W$  est un module sur  $V$ ; il suffit de poser  $\lambda(v, w) = \mu(v, w)$  et  $\rho(w, v) = \mu(w, v)$ . Quand  $W$  est ainsi considéré comme un  $V$ -module,  $V$  lui-même est un sous-module. Grâce à des principes généraux, l'espace quotient  $M = W/V$  est alors aussi un  $V$ -module. Si  $\pi : W \rightarrow M$  est la projection naturelle et  $U$  un espace de  $W$  complémentaire à  $V$ , alors la restriction de  $\pi$  à  $U$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'application inverse  $M \rightarrow U$  est notée  $\pi^*$ . La structure de  $V$ -module  $(\lambda', \rho')$  de  $M$  est ainsi donnée par

$$\lambda'(v, m) = \pi\mu(v, \pi^*m) = \pi\lambda(v, \pi^*m),$$

$$\rho'(m, v) = \pi\mu(\pi^*m, v) = \pi\rho(\pi^*m, v).$$

Soit  $f$  une application linéaire d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $W$  (alternée dans le cas de Lie; alternée sauf en ce qui concerne la dernière variable dans le cas de Vinberg); alors  $\delta f$  est donné par les formules habituelles. On peut aussi calculer  $\delta(\pi \circ f)$ ; on utilise la structure de  $V$ -module de  $M$  puisque  $\pi \circ f$  prend ses valeurs dans  $M$ . On voit que les termes  $(\pi \circ f) \bar{\circ} \mu'$  et  $\pi \circ (f \bar{\circ} \mu)'$  sont égaux tandis que  $\lambda'(v, \pi \circ f) = \pi\lambda(v, \pi^* \circ \pi \circ f) = \pi\lambda(v, f)$ ; et de

façon analogue pour  $\rho$ . Il s'en suit que  $\pi \circ \delta f = \delta(\pi \circ f)$ . En particulier  $\delta(\pi \circ f) = 0$  si et seulement si  $\delta f$  prend ses valeurs dans  $V$ .

par son action sur  $V$ . Au sous-espace  $V_1$  nous avons ainsi associé une application linéaire  $A : V \rightarrow U$ . On peut vérifier que les applications  $A$  paramètrent tous les espaces  $V_1$  complémentaires à  $U$ . Soit  $P$  la projection de  $W$  sur  $U$ ,  $Q$  la projection sur  $V$ ; de telle sorte que  $u = Pw$ ,  $v = Qw$ ;  $u_1 = (P+A)w$  et  $v_1 = (Q-A)w$ .

Le sous-espace  $V_1$  est une sous-algèbre si le produit de deux éléments quelconques  $(Q-A)x$  et  $(Q-A)y$  tombe à nouveau dans  $V_1$ ; i.e. donne zéro quand on applique  $P+A$ :

$$(P+A)\mu((Q-A)x, (Q-A)y) = 0.$$

On en tire:

$$P\mu(Qx, Qy) + \{A\mu(Qx, Qy) - P\mu(Ax, Qy) - P\mu(Qx, Ay)\} + \\ + \{-A\mu(Ax, Qy) - A\mu(Qx, Ay) + P\mu(Ax, Ay)\} + A\mu(Ax, Ay) = 0.$$

Le premier terme vaut zéro puisque  $V$  est une sous-algèbre. Aux autres termes nous appliquons  $\pi$ : comme tous les termes ont leurs valeurs dans  $U$ , cela donne une condition équivalente. Nous posons  $\varphi = \pi \circ A$ . De plus, nous remplaçons  $Qx$ ,  $Qy$  par  $x$ ,  $y$  en comprenant bien que  $x, y \in V$ . Cela ne donne aucun affaiblissement de la condition puisque  $A$  et  $Q$  valent tous deux zéro sur  $U$ . Finalement, nous utilisons les applications  $\lambda'$  et  $\rho'$  quand elles sont applicables. On obtient alors

$$0 = \{\varphi\mu'(x, y) - \rho'(\varphi x, y) - \lambda'(x, \varphi y)\} + \\ + \pi \circ \{A \bar{\delta} \delta A + \frac{1}{2}[A, A]^\cup\} + \frac{1}{2}\varphi \circ Q \circ [A, A]^\cup = \\ = -\delta\varphi + \frac{1}{2}\pi \circ [A, A] + \frac{1}{2}\varphi \circ Q \circ [A, A]^\cup = \\ = -\delta\varphi + \frac{1}{2}\pi \circ [\pi^*\varphi, \pi^*\varphi] + \frac{1}{2}\varphi \circ Q \circ [\pi^*\varphi, \pi^*\varphi]^\cup$$

Cette équation de déformation peut comme les précédentes être résolue. En posant  $\varphi = t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots$  on trouve immédiatement que  $\varphi_1 \in Z^1(V, M)$  et que l'on peut trouver  $\varphi_2$  seulement si  $\pi \circ [\pi^*\varphi_1, \pi^*\varphi_1]$  est un cobord; ce qu'on a dit ci-dessus implique que c'est toujours un cocycle. Ainsi, l'obstruction première est dans  $H^2(V, M)$ .

Deux déformations  $V_1$  et  $V_2$  de  $V$  sont dites équivalentes quand un automorphisme *intérieur* de  $W$  envoie l'une dans l'autre. On peut montrer que les déformations infinitésimales triviales de  $V$  sont en correspondance biunivoque avec les éléments de  $B^1(V, M)$ . Ainsi,  $H^1(V, M)$  l'espace quotient de  $Z^1(V, M)$  et de  $B^1(V, M)$  donne les « vraies » déformations infinitésimales de  $V$ . En particulier, lorsque  $H^1(V, M) = 0$ ,  $V$  est une sous-algèbre rigide.

Beaucoup de détails nécessaires à une discussion complète de la situation ont été sautés par manque de place. Cependant le modèle est clair: c'est la même chose que ce qui a été montré dans la section 6 avec beaucoup plus de détails. En outre, nous avons montré que la définition de l'opération de base  $[f, g]$  requiert seulement celle des produits de composition.

### 13. *Systèmes de composition.*

L'un des buts de cet article était d'exhiber un type de propriétés communes aux algèbres associatives, aux algèbres de Lie et aux algèbres de Vinberg. Le type le plus important, celui des algèbres commutatives et associatives peut aussi être inclus dans la théorie, mais comme nous l'avons déjà mentionné, de notre point de vue présent assez formel, les propriétés ne sont pas dans ce cas là vraiment très différentes de celles des algèbres associatives pour qu'il vaille la peine de les mentionner ici. La méthode pour exposer la similitude des propriétés consiste en ceci:

(i) établir pour chacun des trois types un système gradué d'applications multilinéaires munies d'un produit de composition vérifiant (9).

(ii) montrer comment un assez grand nombre de problèmes significatifs peut se réduire à l'étude d'un nombre d'opérations (applications cobords, produits de Lie gradués) qui peuvent être définies au moyen du seul produit de composition, sans égard au type d'algèbre d'où il provient.

Cependant, nous avons indiqué que certaines des *propriétés* des opérations *définies* à l'aide des produits de composition ne pouvaient pas être *prouvées* à partir de (9) seul. L'exemple mentionné dans la section 11 était l'identité de Jacobi pour le cup-crochet  $[\ ]^{\cup}$ . Un autre exemple, d'importance pour une étude ultérieure, est la propriété de dérivation des compositions à droite (i.e. des applications du type  $f \mapsto f \bar{\circ} h$ ) par rapport au cup-crochet.

Dans cette section, nous introduisons des opérateurs  $\gamma_p$  déduits du produit de composition. Nous montrons qu'une certaine supposition de « nilpotence » des  $\gamma$  — qui est satisfaite dans tous les cas connus — donne les propriétés mentionnées dans le paragraphe précédent sans difficulté. Les systèmes de composition sont des systèmes gradués avec un produit de composition pour lequel les opérateurs  $\gamma$  associés ont ces propriétés de nilpotence. Nous les mentionnerons tout à l'heure mais donnons d'abord quelques commentaires les motivant dans le cas de Lie.

Les applications multilinéaires que nous considérons sont toutes alternées, de  $V$  dans  $V$ . L'expression de  $f \bar{\wedge} g$  était (cf. (12))

$$\Sigma sg \sigma f(g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}), x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(m+n-1)}),$$



avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(m) \quad \text{et} \quad \sigma(m+1) < \dots < \sigma(m+n-1).$$

Notons cela  $(\gamma_1(g)f)(x_1, \dots, x_{n+m-1})$ ; considérons aussi  $g$  agissant sur  $f$ :

$$(13) \quad \gamma_1(g)f = f \bar{o} g.$$

De façon analogue, on peut prendre  $g_1, g_2$  linéaires respectivement d'ordre  $m_1$  et  $m_2$  et former  $\gamma_2(g_1, g_2)f$ :

$$(\gamma_2(g_1, g_2)f)(x_1, \dots, x_{n+m_1+m_2-2}) =$$

$$\Sigma s g \sigma f(g_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m_1)}), g_2(x_{\sigma(m_1+1)}, \dots, x_{\sigma(m_1+m_2)}), x_{\sigma(m_1+m_2+1)}, \dots, x_{\sigma(m_1+m_2+n-2)}),$$

avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(m_1), \sigma(m_1+1) < \dots < \sigma(m_1+m_2)$$

et

$$\sigma(m_1+m_2-1) < \dots < \sigma(m_1+m_2+n-2).$$

L'opération  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3)f$  est analogue et définie par une somme dont les termes sont de la forme  $\pm f(g_1(\dots), g_2(\dots), g_3(\dots), \dots)$  dans lesquels les variables sont dûment permutées.

En continuant ainsi, on obtient une suite d'opérations  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

On peut exprimer les opérations  $\gamma_p$  au moyen des produits de composition; pour  $\gamma_1$  c'est vrai par définition. Pour voir qu'il en est de même pour  $\gamma_2$ , on observe que le côté gauche de (9) donne une expression du type de droite. Plus précisément, on a

$$\gamma_2(g_1, g_2)f = (-1)^{m_2-1} \{ \gamma_1(g_1)\gamma_1(g_2) - \gamma_1(\gamma_1(g_1)g_2) \} f.$$

La formule (9) dit, en effet, que au sens gradué  $\gamma_2$  est antisymétrique:

$$\gamma_2(g_1, g_2) = (-1)^{m_1 m_2 + 1} \gamma_2(g_2, g_1).$$

De façon analogue,  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3)$  est défini quand on connaît  $\gamma_2$ . Tout d'abord, observons que si  $\gamma_2(g_2, g_3)f$  est écrit de telle façon que  $g_2$  apparait dans la seconde place de  $f$ , et  $g_3$  dans la troisième, on doit pour compenser multiplier par  $(-1)^{m_3-1+m_2-1}$ . Appliquer  $\gamma_1(g_1)$  place  $g_1$  dans la première place, faisant naître  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3)f$  puis place  $g_1$  dans la première place de  $g_2$  et après cela dans la première place de  $g_3$ , chaque fois avec des signes appropriés. On trouve

$$\gamma_3(g_1, g_2, g_3) = (-1)^{m_2+m_3} \{ \gamma_1(g_1)\gamma_2(g_2, g_3) - \gamma_2(\gamma_1(g_1)g_2, g_3) - (-1)^{(m_1-1)m_2} \gamma_2(g_2, \gamma_1(g_1)g_3) \}.$$

Plus généralement, on a, par récurrence

$$(14) \quad \gamma_{p+1}(g_0, \dots, g_p) = (-1)^{m_1 + \dots + m_p - p} \{ \gamma_1(g_0) \gamma_p(g_1, \dots, g_p) - \\ - \sum_{i=1}^n (-1)^{(m_0 - 1)(m_1 + \dots + m_{i-1})} \gamma_p(g_1, \dots, \gamma_1(g_0) g_i, \dots, g_p) \}$$

On peut montrer comme conséquence de (9) (la déduction est assez compliquée) que  $\gamma_p(g_1, \dots, g_p)$  est antisymétrique en  $g_1, \dots, g_p$ ; i.e. que si on interchange  $g_i$  et  $g_{i+1}$  on doit avoir comme facteur  $(-1)^{m_i m_{i+1} + 1}$ . Une preuve beaucoup plus simple peut s'obtenir en utilisant les propriétés alternées de  $f$  et de  $g$  (puisque, somme toute, nous sommes en train de discuter le cas de Lie), mais l'observation faite ici est qu'en vérité (9) seul suffit.

L'opérateur  $\gamma$  peut être défini dans le cas associatif et le cas de Vinberg par la même formule de récurrence commençant par le produit de composition. Dans le cas associatif,  $\gamma_p(g_1, \dots, g_p)f$  est une somme de termes dans chacun desquels les  $g_i$  occupent  $p$  places de  $f$ , de toutes les façons possibles, les signes étant appropriés. Les variables  $x_1, \dots, x_{m_1 + \dots + m_p + n - p}$  restent dans leur ordre naturel. Dans le cas de Vinberg deux sortes de mélanges interviennent mais les  $g_i$  occupent toujours dans chaque terme des places différentes de  $f$ .

Il est clair, dans chacun des cas ci-dessus, que si  $f$  est une fonction d'un nombre de variables plus petit que  $p$ ,  $\gamma_p$  ne peut plus se mettre sous la forme indiquée. D'ailleurs si on se réfère à la formule de récurrence, si  $\gamma_{p+1}(\dots)$  s'applique à une  $f$  linéaire d'ordre  $p$ , alors les termes à droite de l'expression s'annulent et  $\gamma_{p+1}(\dots)f = 0$ . Par récurrence  $\gamma_q(\dots)f = 0$  pour  $q > p$ . C'est la propriété de « nilpotence » de  $\gamma$  qui pour les calculs variés est nécessaire en plus de (9).

**DÉFINITION.** *Un système de composition* est une algèbre graduée munie d'un produit  $\bar{o}$  compatible avec la graduation réduite, vérifiant (9) et pour laquelle les opérateurs  $\gamma_p$  définis par (13, 14) vérifient  $\gamma_q(g_1, \dots, g_p)f = 0$  si le degré de  $f$  est  $< p$ .

La propriété de nilpotence est déjà intéressante pour les petites valeurs de  $p$ . Pour  $p = 1$ , elle dit que les produits de composition  $x \bar{o} f$  valent zéro quand  $x$  appartient à  $V$ ; pour  $p = 2$ , elle dit que pour  $f$  linéaire on a  $(f \bar{o} g_2) \bar{o} g_1 = f \bar{o} (g_2 \bar{o} g_1)$ ; ces deux propriétés furent déjà énoncées comme une partie du théorème de la section (4) dont (9) fait partie.

Le cas  $p = 3$  donne de nouvelles propriétés. Nous observons d'abord que  $\gamma_2(f, g) \mu = [f, g]^\vee$ . De plus, on a



$$0 = (-1)^{n+m} \gamma_3(h, f, g) \mu = \gamma_1(h) \gamma_2(f, g) \mu - \gamma_2(\gamma_1(h)f, g) \mu + \\ + (-1)^{(p-1)n} \gamma_2(f, \gamma_1(h)g) \mu,$$

c'est-à-dire

$$[f, g]^\cup \bar{o} h = [f \bar{o} h, g]^\cup + (-1)^{(p-1)n} [f, g \bar{o} h]^\cup.$$

C'est justement la propriété de dérivation de la composition à droite.

De façon à déduire l'identité de Jacobi pour le cup-crochet, nous avons besoin d'une formule pour  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3) \gamma_1(f)$ . Nous avons déjà une formule pour  $\gamma_1(g_3) \gamma_1(f)$ , en permutant quelques termes dans la définition de  $\gamma_2$ :

$$\gamma_1(g_3) \gamma_1(f) = (-1)^{n-1} \gamma_2(g_3, f) + \gamma_1(\gamma_1(g_3)f).$$

Ensuite nous essayons de remplacer  $\gamma_1(g_3)$  par  $\gamma_2(g_2, g_3)$ . D'abord nous appliquons  $\gamma_1(g_2)$  à la formule ci-dessus

$$\gamma_1(g_2) \gamma_1(g_3) \gamma_1(f) = (-1)^{n-1} \{ (-1)^{m_3+n} \gamma_3(g_2, g_3, f) + \gamma_2(\gamma_1(g_2)g_3, f) + \\ + (-1)^{(m_2-1)m_3} \gamma_2(g_3, \gamma_1(g_2)f) \} + \\ + (-1)^{m_3+n} \gamma_2(g_2, \gamma_1(g_3)f) + \gamma_1(\gamma_1(g_2) \gamma_1(g_3)f).$$

Ensuite, nous remplaçons  $g_3$  par  $\gamma_1(g_2)g_3$  dans la même formule:

$$\gamma_1(\gamma_1(g_2)g_3) \gamma_1(f) = (-1)^{n-1} \gamma_2(\gamma_1(g_2)g_3, f) + \gamma_1(\gamma_1(\gamma_1(g_2)g_3)f),$$

et soustrayons les deux résultats. Après avoir supprimé un facteur  $(-1)^{m_3-1}$  nous obtenons

$$\gamma_2(g_2, g_3) \gamma_1(f) = \gamma_3(g_2, g_3, f) + \gamma_1(\gamma_2(g_2, g_3)f) + \\ + (-1)^{m_2m_3+n} \gamma_2(g_3, \gamma_1(g_2)f) + (-1)^n \gamma_2(g_2, \gamma_1(g_3)f).$$

Ensuite, on répète le procédé. La formule qu'on vient de dériver est utilisée trois fois; tout d'abord elle est multipliée sur la gauche par  $\gamma_1(g_1)$ ; ensuite  $g_2$  est remplacé par  $-\gamma_1(g_1)g_2$ ; enfin  $g_3$  est remplacé par  $-(-1)^{(m_1-1)m_2} \gamma_1(g_1)g_3$ ; alors on ajoute les trois résultats. On trouve ainsi

$$(-1)^{m_2+m_3} \gamma_3(g_1, g_2, g_3) \gamma_1(f) = (-1)^{m_2+m_3+n+1} \gamma_4(g_1, g_2, g_3) + \\ + (-1)^{(m_1-1)(m_2+m_3)} \gamma_3(g_2, g_3, \gamma_1(g_1)f) + \\ + (-1)^{(m_2-1)(m_3-1)} \gamma_3(g_1, g_3, \gamma_1(g_2)f) + \\ + (-1)^{m_2+m_3} \gamma_3(g_1, g_2, \gamma_1(g_3)f) + \\ + (-1)^{m_2+m_3+n+1} \gamma_2(g_1, \gamma_2(g_2, g_3)f) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ (-1)^{m_1 m_2 + m_2 + m_3 + 1} \gamma_2 (g_2, \gamma_2 (g_1, g_3) f) + \\
 &+ (-1)^{(m_1 + m_2) m_3 + m_2 + m_3 + n + 1} \gamma_2 (g_3, \gamma_2 (g_1, g_2) f) + \\
 &+ (-1)^{m_2 + m_3} \gamma_1 (\gamma_3 (g_1, g_2, g_3) f).
 \end{aligned}$$

On observe un terme unique en premier,  $\gamma_4$ , et en dernier,  $\gamma_1 (\gamma_3)$ . Les termes du milieu forment deux groupes,  $\gamma_3 (\gamma_1)$  et  $\gamma_2 (\gamma_2)$ , et comprennent  $g_1, g_2, g_3$  dûment permutés. On applique la formule à  $\mu$ , en prenant  $f = \mu$ . Alors le côté gauche vaut zéro, puisque  $\gamma_1 (\mu) \mu = \mu \bar{o} \mu = 0$ . Le terme  $\gamma_4$  donne zéro grâce à la propriété qu'on vient de trouver; la même chose vaut pour le terme  $\gamma_3 (\gamma_1)$ . Le dernier terme donne zéro puisque  $\gamma_3 (\dots) f = \gamma_3 (\dots) \mu = 0$ . Il reste les trois derniers termes du milieu; on les multiplie par  $(-1)^{m_2 + m_3 + n + m_1 m_3 + 1}$  et on obtient

$$\begin{aligned}
 &(-1)^{m_1 m_3} [g_1, [g_2, g_3]^\cup]^\cup + (-1)^{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 1} [g_2, [g_1, g_3]^\cup]^\cup + \\
 &+ (-1)^{m_2 m_3} [g_3, [g_1, g_2]^\cup]^\cup = 0,
 \end{aligned}$$

c'est justement l'identité de Jacobi.

Ce qui précède est juste un échantillon des applications de la propriété de nilpotence. L'utilité de  $\gamma$  est également claire si on observe que, avec la notation de la section 6, pour  $f$  linéaire d'ordre  $n$ , on a

$$\sigma (\alpha) f = \frac{1}{n!} \alpha^{-1} \bar{o} \{ \gamma_n (\alpha, \dots, \alpha) f \}.$$

Par cette formule, on peut définir et manipuler l'action de groupe des éléments inversibles de degré 1.

Tout type d'algèbre pour lequel on peut trouver un système de composition, partage les propriétés que nous avons déduites au moyen des systèmes de composition. Il est maintenant clair que ces propriétés couvrent un large domaine.

#### RÉFÉRENCES

- [1] BOURBAKI, N., Groupes et algèbres de Lie, chap. I: *Algèbres de Lie*. Hermann, Paris 1960.
- [2] JACOBSON, N., Lie algebras. *Interscience Publishers*, 1962.
- [3] VINBERG, E. B., Theory of convex homogeneous cones. *Trudy Moscow Mat. Obshch.* 12 (1963) 303-358 = Transl. *Moscow Math. Soc.* 12 (1963) 340-403.
- [4] GERSTENHABER, M., The Cohomology structure of an associative ring. *Ann. of Math.* 78 (1963) 267-288.
- [5] GERSTENHABER, M., On the deformations of rings and algebras. *Ann. of Math.* 79 (1964) 59-104.